

H. P O I N C A R É
C I E N C I A
Y M É T O D O

SEGUNDA EDICIÓN



COLECCIÓN AUSTRAL

ESPASA-CALPE ARGENTINA, S. A.
BUENOS AIRES-MÉXICO

UNA CREACION

DE

ESPASA - CALPE ARGENTINA, S. A.

La COLECCION AUSTRAL publica

Los libros de que se habla; los libros de éxito permanente; los libros que usted deseaba leer; los libros que aun no había usted leído porque eran caros o circulaban en malas ediciones y sin ninguna garantía; los libros de cuyo conocimiento ninguna persona culta puede prescindir; los libros que marcan una fecha capital en la historia de la literatura y del pensamiento; los libros que son actuales ayer, hoy y siempre. La COLECCION AUSTRAL ofrece ediciones íntegras autorizadas, bellamente presentadas, muy económicas. La COLECCION AUSTRAL publica libros para todos los lectores y un libro para el gusto de cada lector.

HENRI POINCARÉ

Nació en Nancy en 1854 y murió en París en 1912. Indudablemente merece ser considerado como la más brillante mentalidad francesa de fines del siglo pasado, por su importante contribución a la Matemática, la Física y la Astronomía teórica. Luego de su temprana iniciación como profesor en Caen, en 1881 ingresó en la Sorbona y dictó sucesivamente cursos de mecánica teórica y experimental, física matemática, cálculo de probabilidades y mecánica celeste, retirándose en 1899, habiendo sido miembro de las más importantes instituciones culturales francesas y europeas. De su notable obra escrita merecen citarse, entre otros tratados magistrales, los siguientes: **Théorie de L'Elasticité, Calcul des Probabilités, Electricité et optique, Les Methodes Nouvelles de la Mécanique Celeste**. Además, deben citarse especialmente otros, en los que hace un estudio crítico de los conceptos científicos, en los cuales, como dice Antonio Caso, «se propuso elucidar la naturaleza de la investigación científica». Son ellos **La science et l'hypothese**, publicada ya en nuestra COLECCION AUSTRAL, **La valeur de la Science, Dernières penseis** y **SCIENCE ET METHODE**, en los cuales revela la madurez científica, el estilo brillante y la claridad y precisión del clásico pensamiento francés del tipo racionalista.

ESPASA - CALPE ARGENTINA, S. A.
BUENOS AIRES MEXICO D. F.
Tacuarí 328 Donceles 57

CIENCIA Y MÉTODO

HENRI POINCARÉ

CIENCIA Y MÉTODO

SEGUNDA EDICIÓN

ESPASA · CALPE ARGENTINA, S. A.
BUENOS AIRES · MÉXICO

Edición popular para la
COLECCIÓN AUSTRAL

Primera edición: 2 - III - 1944

Segunda edición: 24 - I - 1946

Traducción de M. García Miranda y L. Alonso.

*Queda hecho el depósito dispuesto por la ley N° 11723
Todas las características gráficas de esta colección han
sido registradas en la oficina de Patentes y Marcas
de la Nación.*

*Copyright by Cía. Editora Espasa-Calpe Argentina, S. A.
Buenos Aires, 1946*

IMPRESO EN ARGENTINA
PRINTED IN ARGENTINE

Acabado de imprimir el 24 de enero de 1948

Cía. Gral. Fabríl Financiera, S. A. - Iriarte 2035 - Buenos Aires

ÍNDICE

	PÁG.
INTRODUCCIÓN	11

LIBRO PRIMERO

EL SABIO Y LA CIENCIA

CAPÍTULO I. — <i>La elección de los hechos</i>	15
CAPÍTULO II. — <i>El porvenir de las matemáticas</i>	23
La aritmética	34
El álgebra	35
La geometría	36
El cantorismo	38
La búsqueda de los postulados	39
CAPÍTULO III. — <i>La invención matemática</i>	40
CAPÍTULO IV. — <i>El azar</i>	55
I	55
II	57
III	60
IV	61
V	64
VI	65
VII	69
VIII	71
IX	73
X	75

LIBRO SEGUNDO

EL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

CAPÍTULO I. — <i>La relatividad del espacio</i>	77
I	77
II	83
III	86
IV	90
V	93
VI	94
CAPÍTULO II. — <i>Las definiciones matemáticas y la enseñanza</i>	97
Aritmética	109
Geometría	111
Mecánica	113
CAPÍTULO III. — <i>Las matemáticas y la lógica</i>	117
Introducción	117
I	119
II	120
III	122
IV Definiciones y axiomas	123
V	125
VI	126
VII La pasigrafía	127
VIII	130
CAPÍTULO IV. — <i>Las nuevas lógicas</i>	131
I La lógica de Russell	131
II	132
III	133
IV	134
V La aritmética	135
VI La lógica de Hilbert	136
VII	137

	PÁG.
VIII	138
IX	139
X La geometría	139
XI Conclusión	140
XII	143
XIII	144
CAPÍTULO V. — <i>Los últimos esfuerzos de los logísticos</i>	145
I	145
II La infalibilidad de la logística ..	145
III La libertad de la contradicción ..	147
IV La segunda objeción	149
V	151
VI Zigzag-theory y Noiclas-theory ..	153
VII La verdadera solución	155
VIII Las demostraciones del principio de inducción	156
IX	157
X El axioma de Zermelo	157
XI Conclusiones	158

LIBRO TERCERO

LA NUEVA MECÁNICA

CAPÍTULO I. — <i>La mecánica y el radio</i>	161
I Introducción	161
II Masa longitudinal y masa trans- versal	164
III Los rayos canales	167
IV La teoría de Lorentz	168
V Consecuencias mecánicas	171
CAPÍTULO II. — <i>La mecánica y la óptica</i>	173
I La aberración	173
II El principio de relatividad	176
III El principio de reacción	179

	PÁG.
IV Consecuencias del principio de relatividad	182
V La experiencia de Kaufman ...	184
VI El principio de inercia	186
VII La onda de la aceleración	188
CAPÍTULO III. — <i>La mecánica nueva y la astronomía</i> ...	191
I La gravitación	191
II Comparación con las observaciones astronómicas	194
III La teoría de Lesage	197
IV Conclusiones	202

LIBRO CUARTO

LA CIENCIA ASTRONÓMICA

CAPÍTULO I. — <i>La Vía Láctea y la teoría de los gases</i> ...	205
CAPÍTULO II. — <i>La geodesia francesa</i>	218
Conclusiones generales	228

INTRODUCCIÓN

He reunido aquí algunos estudios referentes más o menos directamente a cuestiones de Metodología Científica. El método científico consiste en observar y experimentar. Si el sabio dispusiera de mucho tiempo, no tendríamos más que decirle: «Observe bien»; pero como carece de tiempo suficiente como para observarlo todo y más aún para observarlo bien, es preciso que elija, pues bien se ha dicho que más vale no mirar que mirar mal. Por lo tanto la cuestión primordial es saber cómo tiene que hacer la elección. Este problema tanto se le plantea al Físico como al Historiador; igualmente se le presenta al Matemático, y los principios que deben guiar tanto a los unos como a los otros no están totalmente desprovistos de Analogía. El sabio se conforma con ella instintivamente y se puede, reflexionando sobre estos principios, profetizar cuál puede ser el futuro de las Matemáticas.

Nos daremos cuenta más fácilmente de esto si observamos al sabio en su trabajo. En primer lugar hay que conocer el mecanismo psicológico de la invención y en especial el de la invención matemática. La observación de los procedimientos de trabajo del matemático es sobre todo instructiva para el psicólogo.

En todas las ciencias de observación es necesario contar con los errores debidos a las imperfecciones de nuestros sentidos e instrumentos. Felizmente se puede admitir que en ciertas condiciones estos errores se compensan en parte, de tal modo que desaparecen por término medio.

Esta compensación se debe al azar. Pero ¿qué es el azar? Este concepto es difícil de justificar y más aún de definir; sin embargo, lo que acabo de decir a propósito de los errores de observación demuestra que el sabio no pue-

de evitarlos. Es necesario dar entonces una definición tan precisa como sea posible de esta noción tan indispensable como difícil de definir.

Éstas son las generalidades que se aplican en todas las ciencias. Verbigracia; el mecanismo de la invención matemática no se diferencia mucho del mecanismo de la invención general.

Trato a continuación las cuestiones que se refieren en particular a ciertas ciencias y en especial a las matemáticas puras.

Me veo obligado a tratar en los capítulos que les son consagrados asuntos un poco más abstractos. Debo primero hablar de la noción del espacio; todo el mundo sabe que el espacio es relativo o más bien todo el mundo lo dice, ¡pero cuántas personas reflexionan aún como si lo creyeran absoluto! Basta sin embargo reflexionar un poco para darse cuenta a qué cantidad de contradicciones están expuestas.

Los problemas de la enseñanza tienen también su importancia, primero por ellos mismos, después porque reflexionar sobre la mejor manera de hacer penetrar las nociones nuevas en los cerebros vírgenes, es al mismo tiempo reflexionar sobre la manera en que estas nociones han sido adquiridas por nuestros antepasados y por consiguiente sobre su verdadero origen, es decir en el fondo, sobre la verdadera naturaleza de estas nociones. ¿Por qué los niños no comprenden a menudo las definiciones que satisfacen a los sabios? ¿Por qué hace falta darles otras? Esta es la cuestión que me planteo en el capítulo siguiente y cuya solución podría, creo, sugerir útiles reflexiones a los filósofos que se ocupan de la lógica de las ciencias.

Por otra parte, muchos de los geómetras creen que se pueden reducir las Matemáticas a las reglas de la lógica formal. Esfuerzos inauditos han sido intentados en este sentido; para conseguirlo no se ha temido ni aun mismo derribar el orden histórico de la génesis de nuestras concepciones y se ha tratado de explicar lo finito por lo infinito. Creo haber conseguido, para todos los que aborden

el problema imparcialmente, demostrar que en él hay una ilusión engañosa. Espero que el lector comprenderá la importancia de este problema y me perdonará la aridez de las páginas que me he visto obligado a consagrarle.

Los últimos capítulos referentes a Mecánica y Astronomía han de ser más amenos.

La Mecánica parece estar a punto de sufrir una revolución completa. Las nociones más firmes están siendo desmenuzadas por atrevidos innovadores. Pero es indudable que el conocimiento de sus doctrinas es de capital interés, la exposición de las cuales he tratado de explicar en la forma más clara. He seguido en la medida de lo posible el orden histórico; debido a que las nuevas ideas parecerían demasiado sorprendentes si no se viera cómo han podido germinar.

La Astronomía nos ofrece espectáculos grandiosos al mismo tiempo que plantea problemas gigantescos. No se puede ni remotamente soñar en aplicarles directamente el método experimental; nuestros laboratorios son demasiado reducidos. Pero la Analogía con los fenómenos que estos laboratorios nos permiten alcanzar, pueden sin embargo servir de guía al astrónomo. La Vía Láctea, por ejemplo, es un conjunto de soles cuyos movimientos parecen al principio caprichosos. ¿Pero este conjunto no es comparable al de las moléculas de un gas, del que la teoría cinética de los gases nos hace conocer las propiedades? De este modo, por un camino desviado, el método del Físico puede ayudar al Astrónomo.

Finalmente he querido hacer en algunas líneas la historia del desarrollo de la Geodesia Francesa; he descrito tras qué esfuerzos perseverantes y a menudo a través de cuántos peligros los geodestas nos han procurado los conceptos que poseemos hoy en día sobre la configuración terráquea. ¿Es éste un problema de método? Sí, sin duda; esta historia nos enseña en efecto de cuántas precauciones es necesario rodear una operación científica seria y el tiempo y las fatigas que se requieren para la conquista de una nueva decimal.

LIBRO PRIMERO

EL SABIO Y LA CIENCIA

CAPÍTULO I

LA ELECCIÓN DE LOS HECHOS

En alguna parte Tolstoi explica por qué a su parecer «La Ciencia por la Ciencia» es una concepción absurda. Nosotros no podemos conocer todos los hechos, puesto que su número es prácticamente infinito. Es preciso elegir desde ahora. ¿Podemos regular esta elección sobre el simple capricho de nuestra curiosidad? ¿No vale más dejarnos guiar por la utilidad, por nuestras necesidades prácticas y sobre todo morales? ¿No tenemos otra ocupación más interesante que la de contar el número de mariquitas que existen sobre nuestro planeta?

Es indudable que la palabra utilizada no tiene para él el sentido que le atribuyen los hombres de negocios y con ellos la mayoría de nuestros contemporáneos. Se preocupa poco de las aplicaciones de la industria, de las maravillas de la electricidad o del automovilismo, a los que considera más bien como obstáculos al progreso moral. Lo útil es sólo lo que puede mejorar al hombre.

Yo, y es necesario que lo diga, no me contentaría ni con lo uno ni con lo otro; no querría ni esta plutocracia ávida y limitada, ni esta democracia virtuosa y mediocre, únicamente ocupada en exponer la mejilla izquierda, y en la que vivirían sabios sin curiosidad, los cuales, evitando los excesos, morirían no de enfermedad, pero sí de fastidio. Mas este es un problema de gustos y no es este el punto que me propongo discutir.

No por eso deja de subsistir este problema que debe retener nuestra atención; si nuestra elección no puede ser determinada más que por el capricho o por la utilidad inmediata, no puede haber Ciencia por la Ciencia, ni por consiguiente Ciencia. ¿Es esto verdad? Que haya que hacer una elección, esto es indudable; cualquiera que sea nuestra actividad, los hechos van más rápidos que nosotros mismos y no podemos nunca alcanzarlos; en el tiempo que el sabio emplea en descubrir un hecho, se producen millones en un milímetro cúbico de su cuerpo. Querer encerrar la naturaleza en la Ciencia sería como querer meter el todo en la parte.

Pero los sabios creen que hay una jerarquía de hechos y que se pueden hacer entre ellos una elección juiciosa; tienen razón, puesto que sin esto no habría Ciencia, y la Ciencia existe. Es suficiente abrir los ojos para ver que las conquistas de la industria que han enriquecido a tantos hombres prácticos no habrían jamás existido si estos hombres prácticos hubieran vivido solos, si no hubieran sido precedidos por locos desinteresados que murieron pobres, que no pensaron jamás en la utilidad y que sin embargo tenían otra guía además de su solo capricho.

Bien lo expresó Mach al decir que estos locos han economizado a sus sucesores el trabajo de pensar. Los que habrían trabajado únicamente para una aplicación inmediata no habrían dejado nada tras ellos, y frente a una necesidad nueva, todo habría vuelto a comenzar. Luego, pues, a la mayor parte de los hombres no les gusta pensar y esto por otra parte es un bien puesto que el instinto los guía, lo más a menudo, mejor que la razón no guiaría una inteligencia pura, siempre que persigan un fin inmediato y que sea el mismo; pero el instinto es la rutina y si el pensamiento no lo fecundase, no progresaría más en el hombre que en la abeja o la hormiga. Es necesario entonces pensar por aquellos que no quieren pensar y como son numerosos es preciso que cada uno de nuestros pensamientos sea lo más útil posible y es por esto que una ley será tanto más sabia cuanto más general sea.

Esto nos enseña cómo debe hacerse nuestra elección; los hechos más interesantes son los que pueden servir varias veces, son los que tienen posibilidad de renovarse. Hemos tenido la suerte de nacer en un mundo donde los hay. Supongamos que en lugar de 60 elementos químicos, tuviéramos 60 millares que no fueran los unos comunes y los otros raros, pero que estuviesen repartidos uniformemente. Entonces todas las veces que reuniésemos un guijarro existirían muchas posibilidades de que estuviera formado por cualquier substancia desconocida. Todo lo que supiéramos de otros guijarros no nos serviría para él; delante de cada objeto nuevo estaríamos como el niño que acaba de nacer; como él, no podríamos obedecer a nuestros caprichos o necesidades; en un mundo parecido, no habría Ciencia. Por otra parte el pensamiento y la misma vida serían imposibles, puesto que la evolución no habría podido desenvolver los instintos de conservación. Gracias a Dios, no ocurre así; como todas las dichas a que se está acostumbrado, ésta no es apreciada en su justo valor. El biólogo se encontraría también confuso si no hubiese más que individuos y no especies, si la herencia no hiciera a los hijos parecidos a los padres, etc.

¿Cuáles son entonces los hechos que tienen probabilidades de renovación? Son primero los hechos simples. Claro es que en un hecho complejo están reunidos por el azar mil circunstancias y que sólo un azar más inverosímil aún podría reunirlos de nuevo. Pero si los hay ¿cómo reconocerlos?, ¿quién nos dice que este que creemos simple no encubre una sorprendente complejidad? Todo lo que podemos decir es que debemos preferir los hechos que parecen simples a aquellos en que nuestro ojo grosero discierne elementos disociables. Y entonces una de dos, o esta sencillez es real, o los elementos están lo bastante íntimamente mezclados para no poder ser distinguidos. En el primer caso, tenemos probabilidades de encontrar de nuevo este mismo hecho simple, sea en su pureza, sea entrando él mismo como elemento en un complejo parecido. En el segundo caso, esta íntima mezcla tiene probabilidades de

reproducirse en un conjunto heterogéneo. El azar sabe unir, pero no sabe desunir; para hacer con estos elementos múltiples un edificio bien ordenado en el cual se distingue cualquier cosa hace falta hacerlo a propósito. Hay pocas posibilidades para que en un conjunto en el que se distingue algo esto se produzca. Por el contrario existen muchas en una mezcla que a primera vista parece homogénea. Los hechos que parecen sencillos, aunque no lo sean, serán por lo tanto más fácilmente separados por el azar.

Esto es lo que justifica el método instintivamente adoptado por el sabio, y lo que lo justifica más aún, es que estos hechos tan frecuentes nos parecen sencillos porque estamos acostumbrados a ellos.

¿Pero dónde está el hecho simple? Los sabios han tratado de buscarlo en los dos extremos o sea en lo infinitamente grande y en lo infinitamente chico. El astrónomo lo ha encontrado debido a que las distancias entre los astros son tan inmensas, tan grandes, que parecen un punto; tan grandes que las diferencias cualitativas desaparecen debido a que un punto es más simple que un cuerpo en el que hay formas y cualidades. Por el contrario el físico ha buscado el fenómeno elemental dividiendo ficticiamente los cuerpos en cubos infinitamente chicos, debido a que las condiciones del problema sufren variaciones lentas y continuas cuando se pasa de un punto a otro, y de esta manera estas variaciones son más o menos constantes en el interior de cada uno de estos pequeños cubos. De la misma manera el biólogo instintivamente ha estudiado la célula por considerarla más interesante que el animal entero; el futuro le ha dado la razón, puesto que las células de los organismos más diferentes tienen más semejanzas entre ellas, claro es que para el que sepa reconocerlas, que los organismos entre ellos. La sociología encuentra más dificultades; los elementos para ella lo constituyen los hombres, y éstos son demasiado diferentes, variables, caprichosos, complejos; es por eso que la historia no se reproduce nunca; cómo elegir entonces el hecho in-

interesante. El método es precisamente la elección de los hechos, hay que idear por lo tanto un método. Se han ideado muchos pero ninguno ha dado resultado; cada tesis de sociología propone un método nuevo, entre nosotros, y sea dicho de paso, que el flamante doctor se abstiene rigurosamente de aplicar, de manera que la sociología es la ciencia que posee más métodos y menos resultados.

Por lo tanto es por los hechos regulares que conviene comenzar; pero desde que la regla está bien establecida, desde que está fuera de duda, los hechos que están plenamente confirmados pronto pierden su interés, puesto que no nos enseñan nada nuevo. Entonces es cuando la excepción adquiere importancia. Se cesará de buscar los parecidos, para aproximarse, antes que nada, a las diferencias, y entre las diferencias elegirá primero las más acentuadas, no sólo porque serán las más sorprendentes, sino porque serán las más instructivas. Un ejemplo simple aclarará mi pensamiento. Supongamos que se quiere determinar una curva, observando cualquiera de sus puntos. El práctico que no se preocupe más que por la utilidad inmediata observaría solamente los puntos que necesitase para algún objeto especial; estos puntos se repartirían mal sobre la curva, se acumularían en ciertas regiones, siendo raros en otras, de manera que sería imposible unirlos mediante un trazo continuo y serían inutilizables para otras aplicaciones. El sabio procedería de manera diferente. Como su deseo es estudiar la curva por sí misma, repartirá regularmente los puntos a observar y en cuanto conozca algunos, los unirá por medio de un trazo regular y obtendrá la curva entera. ¿Pero cómo se las arreglará? Si ha determinado un punto extremo de la curva, no se quedará cerca de ella sino que correrá al otro extremo; después de los dos extremos, el punto más instructivo será el del medio, y así sucesivamente.

De este modo cuando una regla queda establecida, lo que debemos buscar antes que nada son los casos en que esta regla tenga más posibilidades de fallar. De ahí, entre otras razones, el interés de los hechos astronómicos, el del pasado geológico; yendo muy lejos en el espacio, o

bien muy lejos en el tiempo, podemos encontrar nuestras reglas habituales completamente trastornadas y estos grandes cambios nos ayudarán a ver mejor o a comprender los pequeños cambios que pueden producirse más cerca de nosotros, en el pequeño rincón del mundo donde estamos obligados a vivir y a obrar. Conoceremos mejor este rincón, por haber viajado a lejanos países donde no teníamos nada que hacer. Pero lo que debemos tratar no es tanto de comprobar los símiles y las diferencias, como volver a encontrar las semejanzas ocultas bajo las divergentes apariencias. Las reglas particulares parecen al principio discordantes, pero mirándolas más detenidamente vemos que se parecen en general; diferentes por la materia, se aproximan por la forma, por el orden de sus partes. Cuando las encaramos por ese lado las veremos extenderse y tratar de abarcar todo. Y he aquí lo que valoriza ciertos hechos que vienen a completar un conjunto y a mostrar que es la imagen fiel de otros conjuntos conocidos.

No puedo insistir más, pero estas cuantas palabras bastan para mostrar que el sabio no elige al azar los hechos que debe observar. No cuenta mariquitas como dice Tolstoi, porque el número de estos animales, por interesantes que sean, está sujeto a caprichosas variaciones. Busca condensar muchas experiencias y muchos pensamientos en un pequeño volumen y es por eso que un pequeño libro de Física contiene tantas experiencias pasadas y mil más posibles, de las cuales se sabe con antelación el resultado.

Pero no hemos aún encarado más que un lado de la cuestión. El sabio no estudia la Naturaleza porque ella es útil; la estudia porque encuentra placer, y encuentra placer porque es bella. Si la Naturaleza no fuera bella, no valdría la pena conocerla, ni que la vida fuera vivida. No hablo aquí, entendamos bien, de esta belleza que sorprende los sentidos, de la belleza de las cualidades y de las apariencias; no es que la desdeñe, lejos de ahí, pero no tiene nada que hacer con la Ciencia; quiero hablar de esa belleza, más íntima, que proviene del orden armonioso de las partes y que sólo una inteligencia pura puede comprender.

Por así decir es ella la que da un cuerpo, un esqueleto a las halagadoras apariencias que embellecen nuestros sentidos y sin este soporte, la belleza de estos sueños fugitivos sería imperfecta, porque sería indecisa y huiría siempre. Por el contrario la belleza intelectual se basta a ella misma y por ella, más que por el bien futuro de la humanidad, el sabio se condena a largos y penosos trabajos.

Entonces es la búsqueda de esta belleza especial, el sentido de la armonía del mundo lo que nos hace elegir los hechos más propicios para contribuir a esta armonía, de la misma manera que el artista escoge entre los rasgos de su modelo los que complementarán el retrato y le darán carácter y vida. No hay que temer que esta preocupación instintiva e inconfesada aparte al sabio de la búsqueda de la verdad. Se puede soñar con un mundo armónico, pero cuán lejos lo dejará el mundo real; los más grandes artistas que ha tenido la historia, los griegos, habían construido un cielo y, sin embargo, a pesar de su grandiosidad, cuán mezquino resulta al lado del verdadero, es decir, del nuestro.

Debido a que la sencillez, como la inmensidad es bella, es que buscamos con preferencia los hechos simples y los hechos grandiosos, que nos complacemos tanto en seguir el curso gigantesco de los astros, ya sea escudriñando con el microscopio esta prodigiosa pequeñez que es también una grandeza, ya sea buscando en los tiempos geológicos las huellas de un pasado que nos atrae por lo remoto.

Se ve que la inquietud hacia lo bello nos conduce a las mismas elecciones que lo de lo útil. Es por eso que esta economía de pensamiento y de esfuerzo, que de acuerdo a Mach es la tendencia constante de la Ciencia, es un manantial de belleza al mismo tiempo que una ventaja práctica.

Los edificios que admiramos son aquellos en que el arquitecto ha sabido proporcionar los medios y el fin, y en donde las columnas parecen llevar sin esfuerzo, casi alegremente, el peso que les han impuesto, como las graciosas cariatídes del Erechtheión. ¿De dónde proviene esta concordancia? Es simplemente que las cosas que nos pa-

recen bellas son las que se adaptan mejor a nuestra inteligencia, por consiguiente son al mismo tiempo el instrumento que esta inteligencia sabe manejar más hábilmente. O bien, ¿hay un juego de evolución y de selección natural? Los pueblos en los cuales el ideal estaba más conforme con su interés, bien entendido, han exterminado a los otros y los han suplantado. Los unos y los otros persiguen su ideal, sin darse cuenta de las consecuencias, mientras que a los unos amenaza con su pérdida, a los otros les da el imperio. Dan ganas de creer que si los griegos triunfaron de los bárbaros y si Europa, heredera del pensamiento de Grecia, domina al mundo, es porque los salvajes amaban los colores chillones y los sonidos ruidosos del tambor que no ocupaban más que sus sentidos, mientras que los griegos amaban la belleza intelectual que se ocultaba tras la belleza sensible y que es la que hace a la inteligencia segura y fuerte.

Sin duda un triunfo parecido causaría horror a Tolstoi y no querría reconocer que puede ser verdaderamente útil. Pero esta búsqueda desinteresada de la verdad por su belleza propia, es sana también y puede mejorar al hombre. Sé bien que hay decepciones, que el pensador no tiene siempre la serenidad que debía encontrar; lo mismo que hay sabios que tienen un mal carácter. ¿Se debe decir por eso que es preciso abandonar la Ciencia y no estudiar más que la moral?

¡Y qué! ¿Creemos acaso que los moralistas son irreprochables cuando han descendido del púlpito?

CAPÍTULO II

EL PORVENIR DE LAS MATEMÁTICAS

Para prever el porvenir de las matemáticas, el verdadero método es estudiar su historia y su estado actual.

¿No es eso para nosotros, los matemáticos, un procedimiento un poco profesional? Estamos acostumbrados a extrapolar, que no es más que un medio de deducir el porvenir del pasado y del presente y como sabemos lo que vale, no corremos el peligro de ilusionarnos sobre el alcance de los resultados que nos da.

En épocas anteriores han existido profetas de desgracias. Repetían, convencidos, que todos los problemas susceptibles de ser resueltos lo habían sido ya, y que después de ellos lo único que haría falta hacer es ponerse a cosechar. Felizmente el ejemplo del pasado nos tranquiliza. Tantas veces hemos creído haber resuelto todos los problemas, o por lo menos, haber hecho el inventario de los que implican una solución. Más tarde el sentido de la palabra solución se ha ensanchado, los problemas insolubles se han convertido en los más interesantes de todos, se han planteado nuevos problemas en que ni siquiera se había soñado. Para los griegos, una buena solución era la que no empleaba más que la regla y el compás; en seguida ha sido la que se obtiene por la extracción de radicales, después en la que no figuran más que funciones algebraicas o logarítmicas. Los pesimistas se encontraban así siempre desbordados, forzados a retroceder, de manera que en el presente creo que no hay más.

Mi intención no es por lo tanto combatir los puestos que

ya han dejado de existir; sabemos que las matemáticas continuarán desenvolviéndose, pero se trata de saber en qué sentido. Se me responderá «en todos los sentidos», y esto es verdad en parte; pero si todo esto fuera cierto, sería un poco espantoso. Nuestras riquezas no tardarían en sernos embarazosas y su acumulación produciría un revoltijo tan impenetrable que sería, como para el ignorante, la verdad desconocida.

El historiador, el físico, deben elegir entre los hechos. El cerebro del sabio, que no es más que un rincón del Universo, no podrá contenerlo jamás entero, de manera que en medio de los innumerables hechos que la Naturaleza nos ofrece, hay algunos de los que no nos ocuparemos mientras que, por el contrario, estudiaremos otros. Sucede lo mismo, *a fortiori*, en Matemáticas; el matemático tampoco puede conservar entremezclados todos los hechos que se le representan; tanto más cuanto que estos hechos lo representan a él mismo, perdón, iba a decir que era su capricho el que los había creado. Es él quien construye con todas las piezas una combinación nueva relacionando los elementos; no es por lo general la naturaleza quien lo ha traído todo hecho.

Ocurre a veces que el matemático se plantea un problema para satisfacer una necesidad de la Física; que el físico o el ingeniero le piden que calcule un número a fin de aplicarlo. ¿Dirán que los geómetras debemos limitarnos a esperar los pedidos y, en lugar de cultivar nuestra ciencia para nuestro placer, no tener otra preocupación más que la de acomodarnos al gusto de nuestra clientela? Si las matemáticas no tienen otro objeto más que acudir en ayuda de los que estudian la Naturaleza, es lógico que de estos últimos debemos esperar la palabra de orden. ¿Es legítima esta manera de pensar? De ningún modo; si no hubiéramos cultivado las ciencias exactas por ellas mismas, no habríamos creado el instrumento matemático y el día en qué hubiera venido la palabra de orden del físico nos hubiera encontrado desarmados.

Los físicos tampoco esperan para estudiar un fenómeno que cualquier necesidad urgente de la vida material les

haya creado una necesidad, y tienen razón; si los sabios del siglo XVIII hubieran abandonado la electricidad, puesto que ella no representaba para ellos más que una curiosidad sin interés práctico no existiría en el siglo XX ni la telegrafía, ni la electroquímica, ni la electrotécnica. Los físicos obligados a elegir no van únicamente guiados por la utilidad. ¿Cómo hacen entonces para escoger entre los hechos naturales? Lo hemos explicado ya en el capítulo anterior; los hechos que les interesan son los que pueden conducir al descubrimiento de una ley; o sea los que son análogos a muchos otros, y que no se nos aparecen aislados, sino estrechamente agrupados con otros. El hecho aislado choca tanto al vulgo como al sabio. Pero es que el físico solamente sabe ver el lazo que une varios hechos en los que la analogía es profunda, pero oculta. La anécdota de la manzana de Newton es probable que no sea verdadera, pero es simbólica, hablemos entonces como si lo fuera. Debemos creer que antes que Newton hubo muchos hombres que vieron caer manzanas: sin embargo ninguno dedujo nada. Los hechos serían estériles si no hubiera espíritus capaces de escoger entre ellos, discerniendo aquellos detrás de cuales se oculta alguna cosa y de reconocer lo que se oculta detrás, espíritus que en el hecho bruto verán el alma del hecho.

En matemáticas hacemos más o menos la misma cosa; de los diversos elementos que disponemos, podemos hacer millones de combinaciones diferentes, pero cada una de estas combinaciones, mientras esté aislada, está completamente desprovista de valor. Nos ha costado a menudo mucho trabajo construirla, pero esto no nos sirve absolutamente de nada, si no es para darnos un tema de deber para la enseñanza secundaria. Sucederá todo lo contrario el día en que esta combinación entre en una clase de combinaciones análogas y en la que habremos notado esta analogía; no nos hallaremos más en presencia de un hecho, pero sí de una ley. Y ese día, el verdadero inventor no será el obrero que pacientemente habrá edificado alguna de estas combinaciones, será el que haya puesto en evidencia su analogía. El primero no habría observado más que

el hecho, el otro habrá percibido el alma del hecho. A menudo para afirmar esta analogía le habría bastado inventar una palabra nueva y esta palabra habría sido creadora; la historia de la Ciencia nos provee de una cantidad de ejemplos que a todos nos son familiares.

El célebre filósofo vienés Mach dijo, que el papel de la ciencia es producir economía de pensamiento de la misma manera que la máquina produce economía de esfuerzo. Y esto se muy justo. El salvaje cuenta con sus dedos, o juntando pequeñas piedras. Enseñando a los niños la tabla de multiplicar, les ahorraremos para más tarde innumerables maniobras con piedras. Con piedras o de otra manera alguien ha comprobado que 6 veces 7 son 42 y ha tenido la idea de anotar el resultado, es por esto que no tenemos necesidad de volver a comenzar.

Éste no ha perdido su tiempo, aunque hubiera calculado nada más que por placer; la operación no le ha requerido más de dos minutos, habría exigido dos mil, si mil hombres la hubieran vuelto a comenzar después de él.

La importancia de un hecho se mide entonces por su rendimiento, es decir, por la cantidad de pensamiento que nos permite esconomizar.

En Física los hechos de gran rendimiento son los que entran en una ley muy general, puesto que permiten prever un gran número de ellos; lo mismo sucede en matemáticas. Me he dedicado a un cálculo complicado y he llegado penosamente al resultado; no sería recompensado en mi esfuerzo si no hubiera llegado a ser capaz de prever los resultados de otros resultados análogos y dirigirlos con seguridad evitando los tanteos a los que tuve que resignarme la primera vez. No habría perdido el tiempo si estos mismos tanteos acabaran por revelarme la profunda analogía del problema que he tratado con una clase mucho más extensa de otros problemas; si me hubieran enseñado a la vez los parecidos y las diferencias; si, en una palabra, me hubieran hecho entrever la posibilidad de una generalización. No es un resultado nuevo que habría adquirido, es una fuerza nueva.

Una fórmula algebraica que nos da la solución de un

tipo de problemas numéricos, siempre que se reemplacen al final las letras por números, es el ejemplo simple que se presenta al espíritu. Gracias a ella un solo cálculo algebraico nos ahorra el trabajo de recomenzar constantemente nuevos cálculos numéricos. Pero esto no es más que un grosero ejemplo; todo el mundo sabe que hay analogías que no pueden expresarse por una fórmula y que son las más valiosas.

Un resultado nuevo tiene valor cuando reúne elementos conocidos, hace mucho tiempo, pero dispersos hasta el punto de parecer extraños los unos a los otros, e introduce de repente el orden donde reinaba el desorden. Nos permite ver entonces en conjunto cada uno de estos elementos y el lugar que ocupan en éste. Este nuevo hecho no es solamente de gran valor por él mismo, sino que él solo les da valor a los viejos hechos que relaciona.

Nuestro espíritu es enfermizo como lo son nuestros sentidos; se perdería en la complejidad del mundo si esta complejidad no fuera armoniosa. No vería los detalles sino lo mismo que un miope y estaría obligado a olvidar cada uno de ellos antes de examinar el siguiente, puesto que sería incapaz de abarcarlos todos. Los únicos hechos dignos de nuestra atención son los que introducen el orden en esta complejidad y la rinden por lo tanto accesible.

Los matemáticos atribuyen una gran importancia a la elegancia de sus métodos y de sus resultados, esto no es sólo por diletantismo. ¿Qué es lo que nos da, en efecto, en una solución, en una demostración, el sentimiento de la elegancia? Es la armonía de las diversas partes, su simetría, su feliz equilibrio, es en una palabra todo lo que pone orden, todo lo que da unidad y que nos permite por lo tanto ver claro y comprender el conjunto al mismo tiempo que los detalles. Pero precisamente esto es lo que le da un gran rendimiento; en efecto, cuanto más claramente veamos este conjunto, mejor nos daremos cuenta de su analogía con otros objetos vecinos, más probabilidades tendremos, por consiguiente, de adivinar las generalizaciones posibles. La elegancia puede provenir del sentimiento de lo imprevisto por el encuentro inesperado de objetos

que no estamos acostumbrados a relacionar; ahí aun es fecunda, puesto que nos descubre los parentescos hasta entonces desconocidos; también es fecunda cuando resulta del contraste entre la sencillez de los medios y la complejidad del problema planteado; nos hace reflexionar entonces sobre la razón de este contraste y lo más frecuente es que nos haga ver que esta razón no es debida al azar, que se encuentra en cualquier ley insospechada. En una palabra, el sentimiento de la elegancia matemática no es otra cosa que la satisfacción debida a no sé qué adaptación entre la solución que se acaba de descubrir y las necesidades de nuestro espíritu y es a causa de esta adaptación que la solución puede ser para nosotros un instrumento. Esta satisfacción estética está por consiguiente unida a la economía de pensamiento. Otra vez más la comparación del *Erechtheión* me viene al espíritu, pero no deseo emplearla con demasiada frecuencia.

Es por la misma razón que, cuando un cálculo un poco largo nos ha conducido a cualquier resultado simple y sorprendente, no estamos satisfechos hasta tanto no hayamos mostrado que podíamos haberlo previsto, si no todo el resultado, por lo menos sus trazos más característicos. ¿Por qué? ¿Qué es lo que nos impide contentarnos con un cálculo que nos ha enseñado, según parece, todo lo que deseábamos saber? Es porque en casos análogos, el gran cálculo no podría servirnos de nuevo, según parece no sucede lo mismo con el razonamiento, a menudo medio intuitivo, que podía habernos permitido preverlo. Como este razonamiento es cierto, vemos al mismo tiempo todas las partes, de manera que se da uno cuenta inmediatamente de lo que hacía falta cambiar para adaptarlo a los problemas de la misma naturaleza que puedan presentarse. Puesto que él nos permite prever si la solución de éstos será simple, nos muestra también si el cálculo merece ser emprendido.

Lo que acabamos de decir basta para demostrar cuán vano sería reemplazar por un procedimiento mecánico cualquiera la libre iniciativa del matemático. Para obtener un resultado que tenga valor real, no es suficiente crear

continuamente cálculos y más cálculos, poseer una máquina para ordenar las cosas; esto nos indica que no es solamente el orden, sino el orden inesperado el que produce algo. La máquina puede trabajar sobre el hecho bruto, pero nunca logrará aprehender el alma de éste.

Desde mediados del siglo pasado, los matemáticos han tratado con ahinco creciente de alcanzar la certeza absoluta; tienen razón y esta tendencia se acentuará cada vez más. En matemáticas la certeza no es todo, mas sin ella no hay nada; una demostración que no sea rigurosa, es la nada. Creo que a nadie se le ha de ocurrir discutir esta verdad. Pero si se la tomara demasiado al pie de la letra, se podría inferir que antes del año 1820, por ejemplo, no había matemáticas, esto sería excesivo; los geómetras de ese entonces sobreentendían voluntariamente lo que nosotros explicamos mediante prolijos discursos; claro es que esto no quiere decir que no se hubiesen apercibido de todo; pero pasaban por encima demasiado rápidamente, y para verlo bien hubiera sido necesario que se hubieran molestado en decirnoslo.

¿Es acaso necesario decirlo tantas veces? Los que primero se han preocupado del rigor, nos han dado razonamientos que debemos tratar de imitar, pero si las demostraciones del futuro deben ser construídas sobre este modelo, los tratados de matemáticas se tornarían muy extensos; si temo por el tamaño no es solamente que me preocupe por el amontonamiento que se produciría en las bibliotecas, sino porque al alargar nuestras demostraciones perderían esa apariencia de armonía de la cual acabo de explicar hace un momento la utilidad.

Es hacia la economía del pensamiento que se debe tender, no es suficiente dar modelos para imitar. Es preciso que se pueda después de nosotros abandonar esos modelos y en lugar de repetir un razonamiento ya hecho, resumirlo en algunas líneas. Y es en esto que se ha logrado el éxito varias veces: por ejemplo, existía una clase de razonamientos que se parecían y que se encontraban en todas partes; eran perfectamente rigurosos, pero eran largos. Un día se imaginó la palabra uniformidad de la

convergencia y esta sola palabra los ha tornado inútiles; ya no hay más necesidad de repetirlos, puesto que se sobreentienden. Los que dividen las dificultades en cuatro, pueden, pues, hacernos un doble servicio, primero enseñarnos a actuar como ellos en la necesidad, pero sobre todo permitirnos lo más a menudo posible de no hacer nada como ellos, sin sacrificar nada al rigor.

Acabamos de ver a través de un ejemplo cuál es la importancia de las palabras en matemáticas; podría citar muchos otros. Como bien dice Mach, no podemos darnos cuenta bien de cuánto pensamiento puede economizar una palabra bien elegida. No recuerdo si ya he dicho que las matemáticas son el arte de dar el mismo nombre a cosas diferentes. Es conveniente que estas cosas diferentes por la materia, sean parecidas por la forma, que puedan, válganos la frase, fundirse en el mismo molde. Cuando el lenguaje ha sido bien elegido, nos sorprende ver que todas las demostraciones hechas para un objeto conocido se aplican inmediatamente a muchos objetos nuevos; no hay que cambiar nada, ni las palabras, puesto que los nombres se han vuelto idénticos.

Una palabra bien elegida es suficiente muchas veces para hacer desaparecer las excepciones que traen las reglas enunciadas en el antiguo lenguaje; es para esto que se han imaginado las cantidades negativas, las cantidades imaginarias, los puntos del infinito y no sé cuántas más; las excepciones, no lo olvidemos, son perniciosas, puesto que ocultan las leyes.

Ésta es una de las características en las que se reconocen los hechos de gran rendimiento, son los que permiten esas felices innovaciones del lenguaje. El hecho bruto se halla algunas veces desprovisto de interés, se le ha podido señalar muchas veces sin haber prestado gran servicio a la Ciencia; no adquiere valor hasta el día en que un pensador más perspicaz se da cuenta de la relación, relación que pone inmediatamente en evidencia y que simboliza mediante una palabra.

Los físicos obran lo mismo, han inventado la palabra energía y esta palabra ha sido prodigiosamente fecunda,

puesto que también crea la ley eliminando las excepciones y designa con la misma palabra cosas diferentes por la materia y parecidas por la forma.

Entre las palabras que han ejercido más influencias señalaré las de grupo y las invariables. Nos han hecho conocer la esencia de muchos razonamientos matemáticos; nos han mostrado en cuántos casos los viejos matemáticos consideraban los grupos sin saberlo y cómo, creyéndose muy alejados los unos de los otros, se encontraban de pronto aproximados sin comprender por qué.

Hoy diríamos que habían encarado los grupos isomorfos. Sabemos ahora que en un grupo la materia interesa poco, que es solamente la forma la que interesa y que cuando se conoce bien un grupo, se conocen por consiguiente todos los grupos isomorfos; y gracias a estos nombres de grupos e isomorfismo que resumen en pocas sílabas esta regla sutil y la tornan en seguida familiar a todos los espíritus, el tránsito es inmediato y puede hacerse economizando todo esfuerzo de pensamientos. La idea de grupo se une por lo tanto a la de transformación, ¿por qué se atribuye tanto valor a la invención de una nueva transformación?, pues porque de un solo teorema nos permite sacar diez o veinte; tiene el mismo valor que un cero colocado a la derecha de un número entero.

Esto es lo que ha determinado hasta ahora el sentido del movimiento de la ciencia matemática y lo que lo ha de determinar en el futuro.

Pero a esto contribuye también la naturaleza de los problemas que se plantean. No podemos olvidar cuál debe ser nuestro propósito; de acuerdo a mi opinión este propósito debe ser doble; nuestra ciencia confina a la vez con la Filosofía y con la Física y es para estos dos vecinos para quienes trabajamos. Es por eso que hemos visto y veremos aún marchar las matemáticas en dos direcciones opuestas.

Por un lado la ciencia matemática debe reflexionar sobre ella misma, y esto es útil, porque cavilar sobre ella misma es reflexionar sobre el espíritu humano que la ha creado, tanto más puesto que entre las múltiples creaciones

del hombre es esta ciencia la que menos ha pedido al exterior, en una palabra, la más pura y esencial. Es por esto que ciertas especulaciones matemáticas son útiles, por ejemplo, las que encaran el estudio de los postulados, de las geometrías no acostumbradas, de las funciones de porte extraño. Cuanto más estas especulaciones se aparten de las concepciones más comunes y por consiguiente de la naturaleza y de sus aplicaciones, mejor nos mostraran lo que el espíritu humano es capaz de hacer cuando se substrahe a la tiranía del mundo exterior, por consiguiente nos lo harán conocer mejor en cuanto a él mismo.

Pero es del lado opuesto al de la naturaleza que hace falta dirigir el grueso de nuestra armada.

Allí nos encontramos al físico o al ingeniero que nos dicen: «¿Podría usted integrarme esta ecuación diferencial? La necesitaré dentro de ocho días para tal construcción que debe ser terminada para tal fecha.» «Esta ecuación, responderemos, no entra en uno de los tipos integrables, y usted bien sabe que no hay más.» «Sí, lo sé, ¿pero entonces para qué sirve usted?» A menudo bastaría llegar a un acuerdo, el ingeniero en realidad no necesita lo integral en términos finitos; necesita conocer el porte general de la función integral, o simplemente una cierta cifra fácil de deducir de este integral en caso de conocerlo. Por regla general no lo conoce; pero podría calcular esta cifra sin él, si supiese justamente de qué cifra el ingeniero tiene necesidad y con qué aproximación.

Antes no se consideraba resuelta una ecuación sino cuando se había expresado la solución con ayuda de un número finito de funciones conocidas; pero esto apenas si es posible más que en el uno por ciento. Lo que siempre podemos hacer es resolver el problema *cualitativamente*, es decir, tratar de conocer la forma general de la curva, que representa la función desconocida.

Nos queda luego por encontrar la solución cuantitativa del problema; pero si lo desconocido no puede ser determinado por un cálculo finito, lo podemos representar siempre por una serie infinita convergente que permita calcularlo. ¿Puede esto considerarse como una solución?

Se cuenta que Newton comunicó a Leibnitz un anagrama poco más o menos como éste: aaaaabbbbeeeii, etc. Leibnitz, naturalmente, no comprendió nada; pero nosotros, que tenemos la clave, sabemos que este anagrama quiere decir, traduciéndo-lo al lenguaje moderno: «Yo sé integrar todas las ecuaciones diferenciales.» Claro es, que una de dos, o Newton tuvo suerte, o se hacía singulares ilusiones. Quería simplemente decir que podía formar (por el método de los coeficientes indeterminados) una serie de potencias satisfaciendo formalmente la ecuación propuesta.

Hoy una solución parecida no nos satisfacería más por dos razones: porque la convergencia es demasiado lenta y porque los términos se suceden sin obedecer a ninguna ley. Por el contrario, la serie (x) nos parece satisfactoria, primero porque converge muy rápida (esto es para el practicante que desea obtener su número lo antes posible) y segundo porque vemos de un sólo vistazo la ley de términos (esto es para satisfacer las necesidades estéticas del teórico).

Pero entonces no hay problemas resueltos y otros que no lo están; sólo hay problemas más o menos resueltos, según lo sean por una serie convergente más o menos rápida, o bien regidos por una ley más o menos armoniosa. Ocurre a veces que una solución imperfecta nos conduce hacia una solución mejor. Sucede a menudo que la serie es de una convergencia tan lenta que el cálculo es impracticable y no se logra demostrar más que la posibilidad del problema.

Entonces el ingeniero encuentra esto irrisorio y tiene razón, puesto que no le ayudará a terminar la construcción para la fecha fijada. Se preocupa poco de saber si esto será útil a los ingenieros del siglo XXII. Nosotros pensamos de distinta manera, algunas veces somos más felices de haber ahorrado un día de trabajo a nuestros nietos que una hora a nuestros contemporáneos.

Alguna vez tanteando empíricamente, digámoslo así, llegamos a una fórmula suficientemente convergente. ¿Qué más quiere usted?, nos dice el ingeniero; sin embargo, a pesar de todo, no nos damos por satisfechos, hubiéramos

querido *prever* esta contingencia. ¿Por qué? Porque si la hubiéramos previsto una vez, sabríamos preverla otra. Hemos tenido éxito, es poca cosa a nuestros ojos, si no tenemos la firme esperanza de volver a comenzar.

A medida que la ciencia evoluciona es más difícil abarcarla, en vista de ello se la divide a fin de estudiarla detalladamente; en una palabra, esto es especializarse. Si se exagera en este sentido sería un abstáculo para el progreso de la Ciencia. Ya lo hemos dicho, es por aproximaciones inesperadas entre las diversas partes que se efectúan los progresos. Especializarse mucho sería lo mismo que prohibir estas aproximaciones. Esperemos que en congresos como los de Heidelberg y Roma, poniéndonos en contacto los unos con los otros, abriremos miradores sobre el campo del vecino, obligándonos a compararlo con el nuestro, y de esta manera saldremos un poco de nuestro pequeño villorio; ese sería el mejor remedio para el peligro que acabo de enseñar.

Pero me he detenido demasiado en estas generalidades y es necesario entrar en el detalle.

Pasemos revista a las ciencias particulares que forman las Matemáticas; veamos lo que cada una de ellas ha hecho, hacia dónde nos conducen y qué es lo que se puede esperar de ellas. Si lo que precede es justo, observaremos que los grandes progresos del pasado se han producido cuando dos de estas ciencias se han aproximado, cuando hemos tenido conciencia de la similitud de sus formas, a pesar de lo dispar de sus materias, cuando se han modelado la una sobre la otra, de tal manera que cada una de ellas pudo aprovecharse de las conquistas de la otra. Debemos también entrever en acercamientos de este género los progresos del porvenir.

LA ARITMÉTICA

Los progresos de la aritmética han sido mucho más lentos que los del Álgebra y del Análisis, es fácil comprenderlo; el sentimiento de la continuidad es una guía inapreciable de la cual carece el aritmético, cada número entero está

separado de los otros, tiene permítaseme expresarlo así, cada uno de ellos una especie de excepción, y es por eso que los teoremas generales son más raros en la teoría de los números y los que existen están más ocultos y han de escapar por más tiempo a los investigadores.

Si la aritmética está retrasada con respecto al álgebra y al análisis, le conviene tratar de modelarse sobre estas ciencias para aprovecharse con adelantos. El aritmético debe guiarse por las analogías con el Álgebra. Estas analogías son numerosas y si, en muchos casos, no han sido estudiadas bastante profundamente como para ser de utilidad, son presentidas por lo menos después de largo tiempo; el lenguaje de estas dos ciencias indica que ya se las ha apercibido. Así se habla de números trascendentes, nos damos cuenta en seguida que la clasificación futura de éstos tiene ya por imagen la clasificación de las funciones trascendentales, y sin embargo no vemos muy bien todavía cómo podremos pasar de una clasificación a otra; pero si la hubiéramos visto ya, estaría hecho y no sería la obra del futuro. El primer ejemplo que se me ocurre es el de la teoría de las congruencias, en la que se encuentra un paralelismo perfecto con la de las ecuaciones algebraicas. Claro es que se llegará a completar este paralelismo, que debe subsistir, por ejemplo, entre la teoría de las curvas algebraicas y la de las congruencias de dos variantes.

Cuando los problemas relativos a las congruencias con varias variantes sean resueltos, se habrá dado el primer paso hacia la solución de muchas cuestiones de análisis indeterminado.

EL ÁLGEBRA

La teoría de las ecuaciones algebraicas detendrá mucho tiempo aún la atención de los geómetras; los lados por donde se la puede estudiar son numerosos y diversos.

No hay que creer que el Álgebra está agotada porque nos provea de las reglas necesarias para formar todas las combinaciones posibles; nos falta buscar las combinaciones interesantes, las que satisfacen tal o cual condición. De

esta manera se constituirá una especie de Análisis indeterminado en el que las incógnitas no serán más números enteros sino polinomios.

Entonces esta vez es el Álgebra quien se modela sobre la Aritmética, guiándose sobre la analogía del número entero, ya sea con el polinomio entero de coeficiente cualquiera, o con el polinomio entero de coeficiente entero.

LA GEOMETRÍA

Parece como si la Geometría no pudiera contener nada que no se hubiera tratado ya en el Álgebra o en el Análisis; que los hechos geométricos no fueron otra cosa que los hechos algebraicos o analíticos expresados en otro lenguaje.

Se podría creer entonces que después del examen que acabamos de pasar, no nos quedaría nada por agregar que se refiriera especialmente a la Geometría.

Esto sería desconocer la importancia de un lenguaje bien constituido, no comprender el sentido que se les puede dar a las mismas cosas, la manera de expresarlas y por consiguiente de agruparlas.

En primer lugar las consideraciones geométricas nos conducen a plantearnos nuevos problemas; son si se quiere problemas analíticos, pero que no nos hubiéramos planteado con motivo del análisis. El análisis se aprovecha sin embargo, de la misma manera que se aprovecha de lo que está obligado a resolver para satisfacer las necesidades de la Física.

Una gran ventaja de la Geometría es que los sentidos pueden socorrer a la inteligencia y ayudarla a entrever la ruta a seguir; muchos espíritus prefieren por eso llevar los problemas del análisis a la forma geométrica. Desgraciadamente nuestros sentidos no pueden conducirnos muy lejos; se alejan desde el momento en que queremos salir fuera de las tres dimensiones clásicas. ¿Quiere esto decir que fuera de este dominio restringido donde parecen querer encerrarnos, no debemos contar más que sobre el análisis puro? ¿Que toda geometría que tenga más de tres

dimensiones es vana y sin objeto? En la generación que nos ha precedido, los más grandes maestros hubieran contestado: «Sí, hoy en día estamos tan familiarizados con esta noción que podemos hablar de ella incluso en un curso universitario sin provocar demasiada sorpresa.»

Pero ¿para qué puede servirnos? Es fácil saberlo: expresa en términos muy concisos lo que el lenguaje analítico ordinario diría en frases complejas. Además, este lenguaje nos hace denominar con el mismo nombre lo que se parece y afirma de las analogías, no dejándonoslo olvidar. Nos permite por lo tanto orientarnos en este espacio que es demasiado grande para nosotros y que no podemos ver, recordándonos sin cesar el espacio visible que no es más que una imagen imperfecta sin duda, pero que aun es una imagen. Aquí, como en todos los casos anteriores, es la Analogía con lo simple lo que nos permite comprender lo que es complejo.

Esta Geometría de más de tres dimensiones no es una simple Geometría Analítica, no es solamente cuantitativa, también es cualitativa, y es por ello que es más interesante. Hay una ciencia que se llama el *Análisis Situs* y que tiene por objeto el estudio de las relaciones de posición de los diversos elementos de una figura, abstrayendo sus tamaños. Esta Geometría es solamente cualitativa, sus teoremas serían verdaderos si las figuras, en vez de ser exactas, fueran groseramente copiadas por un niño. Se puede también hacer un *Análisis Situs* de más de tres dimensiones. Su importancia es tan grande que nunca se podría insistir lo bastante sobre ello; el partido que ha sacado Riemann, uno de sus principales creadores, bastaría para demostrarlo. Es necesario que se la llegue a construir completamente en los espacios superiores; tendremos un instrumento que nos permitirá realmente ver en el hiperespacio supliendo nuestros sentidos.

Los problemas del *Análisis Situs* no se habrían, por otra parte, planteado si no se hubiera hablado más que en lenguaje analítico; o más bien, me equivoco, se habrían planteado seguramente, puesto que su solución es necesaria a

un gran número de cuestiones de análisis; pero se habrían planteado aisladamente, los unos después de los otros y sin que se hubiera notado su lazo común.

EL CANTORISMO

Me he referido antes a la necesidad que tenemos de recordar continuamente los primeros principios de nuestra ciencia y al provecho que se puede sacar del estudio del espíritu humano. Es esta necesidad la que ha inspirado dos tentativos que han ocupado un gran lugar en la historia de las Matemáticas en estos últimos años. La primera es el Cantorismo cuyo aporte a la ciencia todo el mundo conoce. Cantor ha introducido en la ciencia una manera nueva de considerar el infinito matemático, ya tendremos ocasión de volver sobre esto en el capítulo VII. Uno de los rasgos más característicos del Cantorismo es que en lugar de elevarse a lo general edificando construcciones cada vez más complicadas y de definir por construcción, parte del *genus supremus* y no define como lo hubieran hecho los escolásticos *pergenus proximum et differentiam specificam*. De ahí el horror que algunas veces han inspirado a ciertos espíritus, a Hermitte por ejemplo, cuya idea favorita era comparar las ciencias naturales con las matemáticas. En la mayoría de nosotros estas prevenciones se habían disipado, pero ha ocurrido que se ha chocado con ciertas paradojas y contradicciones aparentes que hubieran colmado de gozo a Zenón de Elea y a la escuela de Megara. Entonces todos a buscar el remedio. Por mi parte, pienso y no soy el único, lo importante está en no introducir más que otros seres que lo puedan definir completamente en un número finito de palabras. Cualquiera que sea el remedio adoptado, nos podemos prometer el placer que un médico experimenta al ser llamado para seguir un interesante caso patológico.

LA BÚSQUEDA DE LOS POSTULADOS

Nos hemos esforzado en enumerar los axiomas y postulados más o menos disimulados que sirven de fundamento a las diferentes teorías matemáticas. El señor Hilbert ha obtenido brillantes resultados. Parece al principio que este dominio fuera limitado, que no hubiera nada más por hacer cuando el inventario estuviera terminado, lo que sucedería pronto. Pero cuando se tenga todo enumerado aun quedarán bastantes maneras para clasificarlo todo, pues un buen bibliotecario encuentra siempre en qué ocuparse y cada nueva clasificación es de utilidad al filósofo.

Detengo este examen que no podría ni en sueños presentar completo. Creo que estos ejemplos habrán sido suficientes para mostrar por qué mecanismo las ciencias matemáticas han progresado en el pasado y en qué sentido deben marchar en el futuro.

CAPÍTULO III

LA INVENCION MATEMÁTICA

La génesis de la invención matemática es un problema que debe inspirar mucho interés al psicólogo. Es el acto en el cual el espíritu humano prescinde más del mundo exterior, en el que no obra más que por él mismo y sobre él mismo, de manera que estudiando los procesos del pensamiento geométrico, podemos tener esperanzas de alcanzar lo más esencial de él.

Se lo ha comprendido desde hace mucho tiempo; no hace muchos meses una revista titulada *La Enseñanza Matemática*, dirigida por los señores Laisant y Fehr, emprendió una encuesta sobre las costumbres del espíritu y los métodos de trabajo de los diferentes matemáticos.

Había ya esbozado los principales trazos de este artículo cuando los resultados de la encuesta fueron publicados; no pude por consiguiente utilizarlos, me limitaré a decir que la mayoría de los testimonios confirman mis conclusiones, no digo que la unanimidad, puesto que cuando se consulta el sufragio universal no puede uno vanagloriarse de reunirlos.

Un primer hecho debe sorprendernos, o más bien debía sorprendernos si no estuviésemos tan acostumbrados. ¿Cómo es que hay gentes que no comprenden las Matemáticas? Si las Matemáticas no invocan más que las leyes de la Lógica aceptadas por todos los espíritus centrados; si su evidencia está fundada sobre los principios comunes a todos los hombres y que ninguno podría negar sin estar

loco, ¿cómo es que existen tantas personas refractarias a ellas?

Que todo el mundo no tenga capacidad de inventiva no tiene nada de particular. Que todos no puedan retener una demostración que hayan aprendido anteriormente, pase aún, pero que no todos puedan comprender un razonamiento matemático, cuando se lo expone, he aquí lo que al reflexionar parece sorprendente. Sin embargo, los que no pueden seguir este razonamiento sino con gran trabajo son la mayoría; esto es indudable y la experiencia de los maestros de la enseñanza secundaria no me contradecirá seguramente.

Hay más aún. ¿Cómo es posible el error en Matemáticas? Una inteligencia sana no debe cometer una falta de lógica y, sin embargo, hay espíritus muy finos que no tropezarán en un razonamiento muy corto, tal como los que deben efectuar en los actos comunes de la vida, que, sin embargo, son incapaces de seguir o de repetir sin equivocarse las demostraciones de matemáticas, que si bien son más largas, no son después de todo más que una acumulación de pequeños razonamientos, análogos a los que se hacen con tanta facilidad todos los días. ¿Es necesario agregar que los matemáticos tampoco son infalibles? La respuesta nos parece necesaria. Imaginemos una larga serie de silogismos en los cuales las conclusiones de los primeros sirvan de premisas a los siguientes: seremos capaces de comprender algunos de estos silogismos; y no es al pasar de las premisas a la conclusión donde correremos el riesgo de equivocarnos. Pero entre el momento en que encontramos por primera vez una proposición como conclusión de un silogismo y aquel en que la volvemos a encontrar como premisa de otro silogismo, habrá transcurrido a veces mucho tiempo, habremos desarrollado números anillos de la cadena; puede ocurrir también que se la haya olvidado y lo que es peor aún, que nos hubiéramos olvidado el sentido. Puede, pues, entonces, acontecer que se la reemplace por una proposición diferente, o que, conservando el mismo enunciado, que se le atribuya otro sentido; es así como se está expuesto al error.

A menudo el matemático debe servirse de una regla: naturalmente comienza a demostrar esta regla; mientras la demostración está fresca en la memoria, comprende perfectamente su sentido y su alcance y no corre el riesgo de alterarla; pero en cuanto confía en su memoria y no la aplica más que de una manera mecánica, entonces si la memoria le llega a fallar puede aplicarla al revés. Es de esta manera, presentado un ejemplo simple y casi vulgar, como a veces nos equivocamos en operaciones de cálculo por haber olvidado nuestra tabla de multiplicar.

De esta manera la aptitud especial hacia las matemáticas será debida a una memoria muy fiel, o bien a una fuerza de atención prodigiosa. Sería una cualidad análoga a la del jugador de whist, que recuerda las cartas tiradas, o bien, para poner otro ejemplo, a la del jugador de ajedrez que puede encarar un número de combinaciones muy grande y guardarlas en su memoria. Todo buen matemático debería ser al mismo tiempo buen jugador de ajedrez y viceversa; todo buen jugador de ajedrez debería ser igualmente un buen calculador numérico. Ciertamente esto ocurre a veces: Gauss era a la vez un geómetra de genio y un calculador muy rápido y seguro.

Pero hay excepciones, o más bien me equivoco, no puedo llamar a esto excepciones, pues si no las excepciones serían más numerosas que los casos ajustados a la regla. Es Gauss por el contrario quien era una excepción. En cuanto a mí, estoy obligado a confesarlo, soy incapaz de hacer una suma sin faltas. Sería igualmente muy mal jugador de ajedrez; calcularía bien que jugando de tal manera me expongo a tal peligro; pasaría revista a muchos otros golpes que rechazaría por otras tantas razones, y acabaría por jugar la combinación examinada al principio, habiendo olvidado en el intervalo el peligro previsto.

En una palabra, mi memoria no es mala; pero es insuficiente para hacer de mí un buen jugador de ajedrez. ¿Por qué no me falla en un razonamiento matemático en el que la memoria de los jugadores de ajedrez se perderían? Es evidente: porque es guiada por la marcha general del razonamiento. Una demostración matemática no es una

simple yuxtaposición de silogismos; *son silogismos colocados en un cierto orden*, y el orden en el cual están colocados estos elementos es mucho más importante que ellos mismos. Si tengo el sentimiento, la intuición de este orden, de manera que me pueda dar cuenta rápidamente del conjunto del razonamiento, no debo temer más olvidarme de uno de los elementos, cada uno de ellos vendrá a colocarse en el cuadro que le he preparado, sin que haya hecho ningún esfuerzo de memoria.

Me parece entonces, repitiendo un razonamiento aprendido, que lo hubiera podido inventar; esto no es con frecuencia más que una ilusión; pero, asimismo, aunque no soy bastante fuerte para crear por mí mismo, lo vuelvo a inventar a medida que lo repito.

Se concibe que este sentimiento, esta intuición del orden matemático que nos hace adivinar las armonías y las relaciones ocultas, no puede pertenecer a todo el mundo. Los unos no poseerán ni este sentimiento delicado difícil de definir, ni una fuerza de memoria y de atención por encima de lo vulgar, entonces serán incapaces de comprender las Matemáticas un poco elevadas; esto ocurre en la mayoría. Otros no tendrán este sentimiento más que en débil grado, pero estarán dotados de una memoria poco común y de una gran capacidad de atención. Aprenderán de memoria los detalles unos después de los otros, podrán comprender las Matemáticas y alguna vez aplicarlas, pero serán incapaces de crear. Los otros, en fin, poseerán en un grado más o menos elevado la intuición especial de que acabo de hablar y entonces no solamente podrán comprender las Matemáticas aunque su memoria no tenga nada de extraordinario, sino que podrán llegar a ser creadores y tratarán de inventar con más o menos éxito, según que esta intuición esté en ellos más o menos desarrollada.

¿Qué es en efecto la invención matemática? No consiste en hacer nuevas combinaciones con otros seres matemáticos ya conocidos. Esto cualquiera podría hacerlo, pero las combinaciones que se podrían formar así serían infinitas y la mayor parte estaría totalmente desprovista de interés.

Inventar consiste precisamente en no construir combi-

naciones inútiles, sino en construir sólo las que pueden ser útiles, que no son más que una ínfima minoría. Inventar es discernir, es elegir.

Ya expliqué antes cómo debe hacerse esta elección; los hechos materiales dignos de ser estudiados son los que por su analogía con otros son capaces de conducirnos al conocimiento de una ley matemática, de la misma manera que los hechos experimentales nos conducen al conocimiento de una ley física. Son los que nos revelan parentescos insospechados entre otros hechos conocidos desde hace mucho tiempo, pero que erróneamente se creyeron extraños entre sí.

Entre las combinaciones que se escogerán, las más fecundas serán frecuentemente las que están formadas por elementos de sitios muy alejados; y no quiero decir que sea suficiente para inventar el acercar los objetos más dispares que sea posible; la mayor parte de las combinaciones que se formarían de este modo serían totalmente estériles, pero algunas de ellas, muy pocas veces, serían las más fecundas de todas.

Inventar, lo he dicho en otra oportunidad, es elegir, pero la palabra no es del todo justa, hace pensar en un comprador al que se le presentan un gran número de muestras, que examina una después de la otra a fin de hacer su elección. En este caso las muestras serían tan numerosas que una vida entera no bastaría para examinarlas. No es así como las cosas suceden. Las combinaciones estériles ni siquiera se presentarán al espíritu del inventor. En el campo de su conciencia no aparecerán más que las combinaciones realmente útiles y algunas que rechazará, pero que participan un poco de los caracteres de las combinaciones útiles. Todo sucede como si el inventor fuera un examinador de segundo grado, que no tuviera que examinar más que los candidatos declarados admisibles después de una primera prueba.

Lo que he dicho hasta aquí es lo que se puede observar e inferir leyendo los escritos de los geómetras, con la única condición de reflexionar sobre esta lectura.

Pero ya es hora de entrar más en el tema a fin de ver

qué es lo que pasa en el alma misma del matemático. Para esto creo que lo mejor que puedo hacer es apelar a recuerdos personales.

Voy a limitarme a contaros cómo escribí mi primer trabajo sobre las funciones fuchsianas. Os pido perdón, voy a emplear algunas expresiones técnicas, pero no os debéis asustar, pues no hay necesidad alguna que las comprendáis. Diré, por ejemplo, que encontré la demostración de tal teorema en tales circunstancias, este teorema tendrá un nombre bárbaro que muchos de entre ustedes desconocerán, esto no tiene importancia, lo que le interesa al psicólogo no es el teorema, son las circunstancias.

Desde hacía quince días me esforzaba en demostrar que no podía existir ninguna función análoga a lo que yo más tarde llamé funciones fuchsianas; en aquella época era muy ignorante; todos los días me sentaba en mi mesa de trabajo, pasaba una hora o dos, ensayaba un gran número de combinaciones y no llegaba a ningún resultado. Una noche tomé café, contrariando mis costumbres, y no me pude dormir; las ideas surgían en masa, las sentía como chocaban, hasta que dos de ellas se engarzaron, por así decir, para formar una combinación estable. A la mañana siguiente ya había establecido la existencia de una clase de funciones fuchsianas, las que derivan de la serie hipergeométrica; no hice más que redactar los resultados; no tardé más que algunas horas.

Quise a continuación representar estas funciones por el cociente de dos series, esta idea fué perfectamente consciente y reflexionada: la analogía con las funciones elípticas me guiaba. Me pregunté cuáles debían ser las propiedades de estas series si ellas existiesen y llegué sin dificultad a formar las series que he llamado thetafuchsianas.

En ese entonces me fuí de Caen, donde vivía, para tomar parte en un concurso geológico emprendido por la Escuela de Minas. Las peripecias del viaje me hicieron olvidar mis trabajos matemáticos; al llegar a Coutances, subimos en un ómnibus para no sé qué paseo, en el momento en que ponía el pie en el estribo la idea me vino sin que nada en mis pensamientos anteriores me hubiera po-

dido preparar para ella, que las transformaciones de que había hecho uso para definir las funciones fuchsianas eran idénticas a las de la Geometría no-euclidia. No hice la verificación; no hubiera tenido tiempo, puesto que apenas sentado en el ómnibus proseguí la conversación comenzada, pero tuve en seguida la absoluta certidumbre. De regreso a Caen, verifiqué el resultado más reposadamente para la tranquilidad de mi espíritu.

Me puse entonces a estudiar las cuestiones aritméticas sin gran resultado aparente y sin sospechar que ello pudiera tener la más mínima relación con mis anteriores descubrimientos. Disgustado por mi fracaso me fuí a pasar algunos días al borde del mar y pensé en cualquier otra cosa. Un día paseándome sobre el tajamar, la idea me vino, siempre con los mismos caracteres de brevedad, instantaneidad y certeza inmediata, que las transformaciones aritméticas de formas cuadradas ternarias indefinidas eran idénticas a las de la Geometría no-euclidia.

Ya de vuelta, en Caen, reflexioné sobre este resultado y saqué las consecuencias; el ejemplo de las formas cuadráticas me enseñaba que existían más grupos fuchsianos que los que correspondían a la serie hipergeométrica, vi que podía aplicarlos a la teoría de la serie thetafuchsiana y que, por consiguiente, existían otras funciones fuchsianas además de las que se derivaban de la serie hipergeométrica, las únicas que conocía hasta entonces. Me propuse, naturalmente, formar todas estas funciones; hice un asedio sistemático y fuí sacando una tras otra todas las obras avanzadas; sin embargo había entre ellas algunas que se me resistían y cuya caída debía acarrear la de los cuerpos de plaza. Pero todos mis esfuerzos no sirvieron primero nada más que para hacerme conocer mejor la dificultad, lo cual ya era algo. Todo este trabajo fué perfectamente consciente.

Después de esto partí para Mont-Valerien, donde tenía que hacer mi servicio militar; tuve por lo tanto preocupaciones muy diferentes. Un día, atravesando el boulevard, la solución de la dificultad que me había detenido se me

apareció de repente. No traté de profundizarla inmediatamente y fué solamente después de mi servicio que proseguí la cuestión. Tenía todos los elementos, no tenía más que juntarlos y ordenarlos. Redacté entonces mi memoria definitiva de un trazo y sin ninguna dificultad.

Me limitaré a este único ejemplo, es inútil multiplicarlos; en lo que concierne a mis otros descubrimientos, tendría que contar hechos análogos y las objeciones aportadas por otros matemáticos en la encuesta de la *Enseñanza Matemática* no podrían más que confirmarlos.

Lo que sorprenderá, primero, son estas apariencias de iluminación súbita, signo manifiesto de un largo trabajo inconsciente anterior; el papel de ese trabajo inconsciente en la invención matemática me parece indudable y se hallarán huellas en otros casos donde es menos evidente. A menudo cuando se trabaja en una cuestión no se hace nada bueno la primera vez que se pone uno a trabajar; tras de esto se toma uno un reposo más o menos largo y vuelve de nuevo a sentarse a trabajar delante de su mesa. Durante la primera media hora se continúa no encontrando nada y después de golpe la idea decisiva se presenta a la mente. Se podría decir que el trabajo consciente ha sido más fructífero, puesto que ha sido interrumpido y el reposo ha devuelto al espíritu su fuerza y su frescor. Pero es más probable que este reposo haya sido reemplazado por un trabajo inconsciente y que el resultado de este trabajo se haya revelado en seguida al geómetra, lo mismo que en los casos que he citado; solamente que la revelación, en vez de efectuarse en un paseo o en un viaje, se produce durante un período de trabajo consciente, pero independientemente de este trabajo, que desempeña además un papel de desprendimiento, como si fuera el aguijón que hubiera excitado los resultados, ya adquiridos durante el reposo pero que subsistían inconscientes, a tomar la forma consciente.

Hay otra observación que hacer respecto a las condiciones de trabajo de este trabajo inconsciente: es que él no es posible, o en todo caso que solamente es fecundo, si es precedido por una parte y seguido por otra de un pe-

riodo de trabajo consciente. Jamás (y los ejemplos que ya he citado lo prueban bastante) estas inspiraciones repentinas no se producen sino al cabo de varios días de esfuerzos voluntarios, que han parecido absolutamente infructuosos y donde se ha creído no hacer nada bueno, en los que da la impresión de haber hecho una ruta totalmente falsa. Estos esfuerzos no han sido tan estériles como se piensa, han puesto en marcha la máquina inconsciente; sin ellos no habría marchado y ni por lo tanto producido nada.

La necesidad del segundo período de trabajo consciente después de la inspiración se comprende mejor aún. Hace falta poner en orden los resultados de esta inspiración, deducir las consecuencias inmediatas, ordenarlas, redactar las demostraciones, pero sobre todo verificarlas. Hablo del sentimiento de certeza absoluta que acompaña la inspiración; en los casos citados este sentimiento no era engañoso y frecuentemente se presenta así: no hay que creer que esto sea una regla sin excepción; con frecuencia este sentimiento nos engaña sin que por ello sea menos vivo, y uno no se da cuenta de ello sino cuando se ha establecido la demostración. Observé sobre todo este hecho, por las ideas que me han venido por la mañana o por la noche en mi lecho, en un estado semihipnagógico.

Tales son los hechos, he aquí ahora las reflexiones que nos inspiran. El yo inconsciente, o como hemos dicho, el yo subconsciente desempeña un papel capital en la invención matemática, esto resulta de todo lo que precede. Pero se considera vulgarmente el yo subconsciente como puramente automático. Además hemos visto que el trabajo matemático no es más que un simple trabajo mecánico, que no podríamos confiar a una máquina por más perfeccionada que se la supusiera. No se trata solamente de aplicar las reglas, de fabricar todas las combinaciones posibles, de acuerdo a ciertas leyes fijas. Las combinaciones así obtenidas serían demasiado numerosas, inútiles y embarazosas. El verdadero trabajo del inventor consiste en elegir entre estas combinaciones a fin de eliminar las que son inútiles o más bien a no tomarse el trabajo de hacerlas.

Las reglas que deben guiar esta elección son tan finas y delicadas que es poco más o menos que imposible enunciarlas en un lenguaje preciso; más bien se sienten que se formulan. ¿Cómo en estas condiciones pensar en una criba capaz de aplicarlas mecánicamente?

Entonces una primera hipótesis se nos presenta: el yo inconsciente no es inferior al yo consciente; no es sólo automático, es capaz de discernir, tiene tacto, delicadeza, sabe elegir y adivinar. Qué digo, más aún, sabe adivinar mejor que el yo consciente, puesto que ha tenido éxito allí donde el otro ha fracasado. En una palabra, el yo inconsciente ¿no es superior al yo consciente? Ustedes comprenden toda la importancia de esta pregunta. El señor Boutroux, en una conferencia reciente, ha mostrado cómo se ha presentado en diferentes ocasiones y qué consecuencias entrañará una respuesta afirmativa. (Ver también del mismo autor «Ciencia y religión», página 313 y subsiguientes.)

¿Esta contestación afirmativa nos es impuesta por los hechos que acabo de exponer? Confieso que por mi parte no la aceptaría sin repugnancia. Revisemos los hechos y busquemos si no tienen otra explicación.

Cierto es que las combinaciones que se presentan al espíritu como una especie de iluminación súbita, después de un trabajo inconsciente un poco prolongado, son generalmente combinaciones útiles y fecundas que parecen el resultado de la primera tría. Se deduce que el yo subconsciente, habiendo adivinado por una intuición delicada que estas combinaciones podrían ser inútiles, no ha formado más que éstas o más bien ha formado muchas otras que estaban desprovistas de interés y que han permanecido en el inconsciente.

En este segundo punto de vista todas las combinaciones se formarían a consecuencia del automatismo del yo subconsciente, pero solamente las que fueran interesantes penetrarían el campo de la consciencia. Y esto aun es muy misterioso. ¿Cuál es la causa que hace que entre los mil productos de nuestra actividad inconsciente haya algunos que puedan franquear su atrio, mientras que otros

permanecen dentro? ¿Es un simple azar el que les confiere este privilegio? Evidentemente, no; entre todas las excitaciones de nuestros sentidos, por ejemplo, sólo las más intensas logran retener nuestra atención, a menos que esta atención no haya sido atraída hacia ellas por otras causas. Pero generalmente los fenómenos subconscientes privilegiados, aquellos susceptibles de tornarse conscientes, son los que directa o indirectamente afectan más profundamente nuestra sensibilidad.

Podemos sorprendernos de ver invocar la sensibilidad con motivo de demostraciones matemáticas que aparentemente no podrían interesar más que a la inteligencia. Esto sería olvidar el sentimiento de la belleza matemática, de la armonía de los números y de las formas, de la elegancia geométrica. Es un auténtico sentimiento estético que todos los verdaderos matemáticos conocen. He aquí una verdadera sensibilidad.

Según esto, ¿cuáles son seres matemáticos a los que atribuímos este carácter de belleza y elegancia y que son susceptibles de desarrollar en nosotros una especie de emoción estética? Son aquellos cuyos elementos están armoniosamente dispuestos, de manera que el espíritu pueda sin esfuerzo abarcar todo el conjunto penetrando en los detalles. Esta armonía es a la vez una satisfacción para nuestras necesidades estéticas y una ayuda para el espíritu que ella sostiene y guía. Al mismo tiempo poniendo ante nuestros ojos un todo bien ordenado, nos hace sentir una ley matemática. Puesto que ya antes lo hemos dicho, los solos hechos matemáticos dignos de retener nuestra atención y susceptibles de ser útiles son los que pueden hacernos conocer una ley matemática. De tal manera que llegamos a la conclusión siguiente: las combinaciones útiles son precisamente las más bellas, quiero decir, las que pueden encantar más a esa sensibilidad especial que todos los matemáticos conocen, pero que los profanos ignoran hasta el punto de sonreírse.

¿Qué sucede entonces? Entre las numerosas combinaciones que el yo subconsciente ciegamente ha formado, casi todas carecen de interés y de utilidad; pero por eso mismo

no excitan la sensibilidad estética; la conciencia no las conocerá jamás; algunas solamente son armoniosas, y por consiguiente, a la vez inútiles y bellas, serán capaces de conmover esa sensibilidad especial del geómetra, a la que acabo de referirme y que una vez excitada llamará sobre ella nuestra atención y le dará así la ocasión de volverse consciente.

Esto no es más que una hipótesis, mientras tanto he aquí una observación que podría confirmarla: cuando una iluminación súbita invade el espíritu del matemático, sucede con frecuencia que lo engaña; pero acaece también algunas veces, lo he dicho, que no soporta la prueba de una verificación; y ¡bien!, se advierte casi siempre que esta idea es falsa; si hubiera sido justa habría halagado nuestro instinto natural de elegancia matemática.

De este modo es esta sensibilidad estética especial la que juega el papel de la criba delicada a la que me refería antes, y esto hace comprender, por otra parte, por qué aquel que esté desprovisto de ella no será jamás un verdadero inventor.

Todas las dificultades no han desaparecido, sin embargo; el yo consciente está estrechamente limitado, en cuanto al yo subconsciente no conocemos sus límites y es por eso lo mucho que nos repugna suponer que él haya podido formar en tan poco tiempo más combinaciones que la vida entera de un ser consciente podría abarcar. Estos límites existen, sin embargo; ¿es verosímil que pueda formar todas las combinaciones posibles cuyo número aterraría la imaginación?, esto parecerá necesario, no obstante, porque si no produce más que una pequeña parte de estas combinaciones y si lo hace al azar, tendrá pocas posibilidades para que la *buena* que deba escoger se encuentre entre ellas.

Pueda ser que sea necesario encontrar la explicación en este período de trabajo consciente preliminar que precede siempre a todo trabajo inconsciente fructífero. Permítaseme una grosera comparación. Representémonos los elementos futuros de nuestras combinaciones como parecidos a los átomos ganchudos de Epicuro. Durante el reposo

completo del espíritu, estos átomos permanecen inmóviles, están por así decir enganchados al muro; este reposo completo puede entonces prolongarse indefinidamente sin que estos átomos se encuentren y por consiguiente sin que ninguna combinación pueda producirse entre ellos.

Por el contrario, durante un período de reposo aparente y de trabajo subconsciente, algunos de entre ellos se desenganchan y son puestos en movimiento. Surcan en todos los sentidos el espacio, iba a decir el reducto donde están encerrados, como podría hacerlo por ejemplo una nube de moscardones o, si prefieren una comparación más sabia, como lo hacen las moléculas gaseosas en la teoría cinética de los gases. Sus choques mutuos pueden entonces producir combinaciones nuevas.

¿Cuál va a ser el papel del trabajo consciente preliminar? Evidentemente movilizar alguno de estos átomos, desengancharlos del muro y ponerlos en movimiento. Se cree que no se ha hecho nada bueno, porque se han movido estos elementos de mil maneras diferentes para tratar de reunirlos y no se ha podido encontrar un conjunto satisfactorio. Pero después de esta agitación que les ha sido impuesta por nuestra voluntad, estos átomos no vuelven a su reposo primitivo, continúan libremente su danza.

Según esto, nuestra voluntad no los ha elegido al azar, persigue un objeto perfectamente determinado, los átomos movilizados no son por lo tanto átomos cualquiera, son aquellos en los cuales podemos razonablemente encontrar la solución buscada. Los átomos movilizados van entonces a sufrir choques, que los harán entrar en combinación, sea entre ellos, sea con otros átomos que han permanecido inmóviles y que han chocado en su curso.

Pido perdón una vez más, mi comparación es grosera: pero no sé cómo podría de otra manera hacer comprender mi pensamiento.

Sea lo que fuere, las solas combinaciones que tienen posibilidad de formarse son aquellas en que uno de los elementos por lo menos, es uno de estos átomos escogidos por nuestra voluntad. Según esto, es evidente que entre ellos se encuentra lo que llamé antes *la buena combinación*.

Puede ser que allí haya un medio de atenuar lo que tenía de paradójal la hipótesis primitiva. Otra observación. No sucede nunca que el trabajo subconsciente nos provea *todo hecho* el resultado de un cálculo un poco largo, en el que tenemos que aplicar reglas fijas. Se podría creer que el yo subconsciente, automático, es particularmente apto para este género de trabajo que es en cierta manera exclusivamente mecánico. Parece que pensando por la noche en los factores de una multiplicación, se podría esperar el producto hecho al despertar, o también un cálculo algebraico, una verificación, por ejemplo, podría hacerse inconscientemente. Esto es falso, la observación lo prueba. Todo lo más que se puede esperar de estas inspiraciones, que son frutos del trabajo subconsciente, son los puntos de partida para cálculos parecidos; en cuanto a los cálculos mismos hace falta hacerlos en el segundo período de trabajo consciente, aquel que sucede a la inspiración y en el que se verifican los resultados de esta inspiración, del que se sacan las consecuencias. Las reglas de estos cálculos son estrictas y complicadas; exigen disciplina, atención, voluntad y por consiguiente consciencia. En el yo subconsciente reina por el contrario lo que yo llamaría la libertad, si se le puede dar este nombre a la simple ausencia de disciplina y al desorden nacido del azar. Solamente este desorden permite los acoplamientos inesperados.

Haré una última observación; cuando he expuesto antes algunas observaciones personales, he hablado de una noche de excitación en que trabajaba contra mi voluntad; los casos en que esto sucede son frecuentes y no es necesario que la actividad cerebral anormal sea causada por un excitante físico como el que he citado. ¡Pues bien!, me parece que en ese caso asiste uno mismo a su propio trabajo inconsciente que se ha vuelto perceptible a la consciencia sobreexcitada y que no por esto cambia de naturaleza. Se da uno cuenta entonces vagamente de lo que distingue a los dos mecanismos, o si se quiere, los métodos de trabajo de los dos *yos*. Las observaciones psi-

cológicas que he podido hacer de esta manera parecen confirmar en sus trazos generales los puntos de vista que acabo de presentar.

Es cierto, tienen gran necesidad, porque ellas son y permanecerán a pesar de todo hipotéticas, el interés de la cuestión es tan grande que no me arrepiento de haberlas sometido al lector.

CAPÍTULO IV

EL AZAR

I

¿Cómo osar hablar de las leyes del azar? ¿No es el azar la antítesis de toda ley? De este modo se expresa Bertrán al comienzo de su *cálculo de probabilidades*. La probabilidad es lo contrario de la certeza, es lo que se ignora y que, por consiguiente, no se puede calcular. Hay en esto una contradicción aparente sobre la cual se ha escrito mucho.

Pero antes que nada, ¿qué es el azar? Los antiguos distinguían de los fenómenos que parecían obedecer a leyes armoniosas preestablecidas aquéllas que atribuían al azar, éstos eran los que no se podían prever, puesto que eran reacios a toda ley. Las leyes precisas no decidían todo, señalaban solamente los límites entre los cuales le estaba permitido al azar moverse. En esta concepción, la palabra azar tenía un sentido objetivo, preciso: lo que era azar para uno, lo era también para el otro incluso para los dioses.

Pero esta concepción no es la nuestra; nos hemos vuelto determinista absolutos y aun los que quieren conservar los derechos del libre arbitrio humano, dejan por lo menos al determinismo reinar sin división en el mundo inorgánico. Todo fenómeno, por mínimo que sea, tiene una causa y un espíritu infinitamente potente, maravillosamente bien informado de las leyes de la Naturaleza, lo hubiera podido prever desde el comienzo de los siglos. Si un espíritu parecido existiera no se podría juzgar con él a ningún juego de azar, se perdería siempre.

Para él la palabra azar no tendría ningún sentido, o mejor dicho no habría azar. Es a causa de nuestra debilidad y de nuestra ignorancia que existe uno para nosotros. Incluso sin salir de nuestra débil humanidad, lo que es azar para el ignorante, no lo es para el sabio. El azar no es más que la medida de nuestra ignorancia. Los fenómenos fortuitos son por definición aquellos de los que ignoramos las leyes.

¿Pero esta definición es lo suficientemente satisfactoria? Cuando los primeros pastores caldeos seguían con la vista los movimientos de los astros, no conocían aún las leyes de la Astronomía, ¿soñaron alguna vez que los astros se movían al azar? Si un físico moderno estudia un fenómeno nuevo y si descubre la ley un martes, ¿habría dicho por eso el lunes que este fenómeno era fortuito? Pero hay más aún, ¿no invocamos, con frecuencia, para profetizar un fenómeno, lo que Bertrán llama las leyes del azar? Por ejemplo, en la teoría cinética de los gases se encuentran las conocidas leyes de Mariotte y de Gay Lussac, es gracias a esta hipótesis que las velocidades de las moléculas gaseosas varían irregularmente, es decir, el azar. Las leyes observables serían mucho más complejas, dirán todos los físicos, si las velocidades fueran reguladas por una ley elemental simple, si las moléculas fueran *organizadas*, si obedecieran a cualquier disciplina. Es gracias al azar, es decir, gracias a nuestra ignorancia que podemos deducir; entonces si la palabra azar es sinónimo de ignorancia, ¿qué es lo que esto quiere decir? ¿Es necesario entonces traducir como sigue? «Ustedes me piden que les profetice los fenómenos que van a producirse. Si por desgracia conociese las leyes que rigen estos fenómenos, no podría llegar a ellos sino por medio de cálculos intrincados y debería renunciar a responderlos, pero como tengo la posibilidad de ignorarlos, os voy a responder en seguida. Y lo que es más extraordinario, mi respuesta ha de ser justa».

Es necesario entonces que el azar sea otra cosa y no la denominación que damos a nuestra ignorancia; que entre los fenómenos de los cuales ignoramos las causas sepamos distinguir los fenómenos fortuitos, sobre los cuales el

cálculo de las probabilidades nos informará provisoriamente, y los que no son fortuitos, sobre los cuales no podemos decir nada hasta tanto no hayamos determinado las leyes que los rigen. Para los fenómenos fortuitos las enseñanzas que nos da el cálculo de las probabilidades no cesarán de ser verdaderas el día en que estos fenómenos sean más conocidos.

El director de una compañía de seguros de vida ignora cuándo morirá cada uno de sus asegurados, pero cuenta con el cálculo de las probabilidades y con la ley de los grandes números, no se equivoca, puesto que distribuye dividendos a sus accionistas. Estos dividendos no cesarían si viniera un médico muy perspicaz y muy indiscreto e informara, una vez firmadas las pólizas, al director sobre las probabilidades de vida de los asegurados. Este médico disiparía la ignorancia del director, pero no tendría ninguna influencia sobre los dividendos, que no son, evidentemente un producto de esta ignorancia.

II

Para encontrar una definición mejor del azar es necesario examinar alguno de los hechos que se acostumbra a mirar como fortuitos y en los cuales el cálculo de las probabilidades parece poder aplicarse; buscaremos a continuación cuáles son sus caracteres comunes.

El primer ejemplo que vamos a escoger es el del equilibrio inestable; si un cono reposa sobre su punta, sabemos que se va a caer, pero ignoramos de qué lado, nos parece que solamente el azar va a decidirlo. Si el cono fuera simétrico, si su eje fuera perfectamente vertical, si no estuviera sometido a ninguna otra fuerza más que a la de gravedad, no se caería.

Pero el menor defecto de simetría hace que se incline ligeramente de un lado o de otro; en cuanto se inclina, por poco que sea, cae de ese lado. Si la simetría es perfecta, una trepidación muy ligera, un soplo de aire que logre ha-

cerlo inclinar algunos segundos de arco será suficiente para determinar su caída y el sentido mismo de ésta será el de la inclinación inicial.

Una causa muy pequeña que se nos escapa determina un efecto considerable que no podemos ignorar, decimos entonces que este efecto es debido al azar. Si conociésemos las leyes de la Naturaleza y la situación del Universo en el instante inicial, podríamos predecir con exactitud la situación de este Universo en un instante ulterior. Pero aun cuando las leyes naturales no tuvieran más secretos para nosotros, no podríamos conocer la situación inicial más que *aproximadamente*. Si esto nos permite prever la situación ulterior *con la misma aproximación*, es todo lo que necesitamos, decimos entonces que el fenómeno ha sido previsto, que es regido por las leyes. Pero no acaece siempre así, puede suceder que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales engendren muy grandes en los fenómenos finales; un pequeño error sobre los primeros produciría un error enorme sobre los últimos. La predicción se ha vuelto imposible y nos encontramos con el fenómeno fortuito.

Nuestro segundo ejemplo ha de ser parecido al primero, lo tomaremos de la Meteorología. ¿Por qué los meteorólogos tienen tantas dificultades para predecir el tiempo con alguna exactitud? ¿Por qué las lluvias y las tempestades nos parecen frutos del azar, hasta tal punto que mucha gente encuentra lógico rogar para que llueva o para que haga buen tiempo, mientras que juzgarían ridículo pedir un eclipse mediante una oración? Vemos que generalmente las grandes perturbaciones se producen en las regiones en que la atmósfera es inestable. Los meteorólogos ven que este equilibrio no es constante, que se va a producir un ciclón en alguna parte; ¿pero dónde?, son incapaces de decirlo; un décimo de segundo más o menos en un punto cualquiera y el ciclón estalla aquí y no allá y extiende sus estragos sobre comarcas que hubiera evitado. Si se hubiera conocido ese décimo de grado, se hubiera podido prever, pero las observaciones no eran ni lo bastante seguras ni precisas, es por esto que todo parece

debido a la intervención del azar. Aquí encontramos el mismo contraste entre una causa mínima, inapreciable para el observador y los efectos considerables que algunas veces se convierten en espantosos desastres.

Pasemos a otro ejemplo, la distribución de los pequeños planetas en el Zodíaco. Sus longitudes iniciales han podido ser cualesquiera; pero sus movimientos medios han sido diferentes y circulan desde hace tanto tiempo, que podríamos decir que actualmente están distribuidos *al azar* a todo lo largo del Zodíaco. De muy pequeñas diferencias iniciales en sus distancias al Sol, o lo que es lo mismo, entre sus movimientos medios, han terminado por tener enormes diferencias entre sus longitudes actuales. Un exceso de un milésimo de segundo en el movimiento diurno, se convertirá en un segundo en tres años, un grado en diez mil años, una circunferencia entera en tres o cuatro millones de años y, ¿qué es esto comparado con el tiempo transcurrido desde que los pequeños planetas se separaron de la nebulosa primitiva de Laplace? He aquí una vez más una pequeña causa y un gran efecto, o dicho de otra manera, de pequeñas diferencias en la causa y de grandes diferencias en el efecto.

El juego de la ruleta nos aleja menos de lo que parece del ejemplo anterior. Supongamos una aguja que puede dar vueltas alrededor de un pivote, sobre un cuadrante dividido en cien sectores rojos y negros alternativamente, si se para sobre un sector rojo, la partida está ganada; si no, está perdida. Todo depende, es evidente, de la impulsión inicial que le demos a la aguja. La aguja dará, supongamos, diez o veinte veces la vuelta, pero se parará más o menos pronto, según se la haya impulsado con más o menos fuerza. Basta solamente que la impulsión varíe un milésimo o dos milésimos, para que la aguja se pare en un sector que es negro, o en el siguiente rojo. Estas son diferencias que en el sentido muscular no se pueden apreciar, y escaparían lo mismo a los instrumentos más delicados. Nos es imposible por lo tanto prever qué es lo que va hacer la aguja que acabamos de impulsar, y es por ello que nuestros corazones se alteran y confían en el azar. La di-

ferencia en la causa es imperceptible, la diferencia en el efecto es para nosotros importantísima, puesto que va en ello toda nuestra puesta.

III

Permítaseme a este propósito una reflexión ajena a mi objeto. Un filósofo dijo hace ya varios años que el porvenir estaba determinado por el pasado, pero que el pasado no lo era por el porvenir; o en otros términos que del conocimiento del presente podremos deducir el del porvenir, pero no el del pasado, puesto que, según él, una causa no puede producir más que un efecto, mientras que un mismo efecto puede producir varias causas diferentes; es claro que ningún sabio puede subscribir esta conclusión; las leyes de la Naturaleza ligan el antecedente al consecuente, de tal manera que el antecedente es determinado por el consecuente, lo mismo que el consecuente lo es por el antecedente. Pero, ¿cuál ha podido ser el origen del error de este filósofo? Sabemos que en virtud del principio de Carnot los fenómenos físicos son irreversibles y que el mundo tiende hacia la uniformidad. Cuando dos cuerpos de temperaturas diferentes se ponen en contacto, el más caliente cede calor al más frío; podemos entonces prever que las temperaturas se igualaran. Pero una vez que las temperaturas sean iguales, si se nos interroga sobre su estado anterior, ¿qué podemos responder? Diremos que uno de los cuerpos era caliente y el otro frío, pero no podremos adivinar cuál de ellos era antes el más caliente.

No obstante, en realidad, las temperaturas no llegan jamás a la igualdad perfecta. La diferencia de temperatura tiende solamente hacia cero de un modo asintótico. Llega entonces un momento en que nuestros termómetros son impotentes para marcarlo. Pero si tuviésemos termómetros mil veces, cien mil veces más sensibles, reconoceríamos que subsiste aún una pequeña diferencia. Y que uno de los cuerpos ha quedado un poco más caliente que el otro;

podríamos afirmar entonces que ése es el que estaba más caliente.

Hay, por lo tanto, al contrario de lo que hemos visto en los dos ejemplos precedentes, grandes diferencias en la causa y pequeñas diferencias en el efecto. Flammarión imaginó un observador que se alejara de la Tierra con una velocidad más grande que la de la luz; para él el tiempo habría cambiado de signo. La historia se invertiría y Waterloo precedería a Austerlitz. Pues para este observador los efectos y las causas estarían intervertidos, el equilibrio inestable no sería más una excepción, a causa de la irreversibilidad universal; todo le parecía salir de una especie de caos en equilibrio inestable, la Naturaleza entera se le aparecería como librada al azar.

IV

He aquí ahora otros ejemplos en los que vamos a ver aparecer caracteres algo diferentes. Tomemos primero la teoría cinética de los gases. ¿Cómo debemos representarnos un recipiente repleto de gas? Innumerables moléculas animadas de grandes velocidades, surcando este recipiente en todos sus sentidos, chocando a cada instante con las paredes, o bien entrechocándose, y estos choques se producen en las condiciones más diversas. Lo que nos sorprende sobre todo aquí no es la pequeñez de las causas, es su complejidad. No obstante ello, el primer elemento se vuelve a encontrar aún aquí y desempeña un papel importante. Si una molécula fuera desviada hacia la derecha o la izquierda de su trayectoria, aunque la desviación fuera mínima comparada con su radio de acción, evitaría un choque o lo sufriría en condiciones diferentes y esto haría variar en 90° o en 180° la dirección de su velocidad después del choque.

No es todo; basta, como acabamos de observar, desviar la molécula antes del choque una cantidad infinitamente pequeña, para que sea desviada después del choque una

cantidad finita. Si entonces la molécula sufre dos choques sucesivos, bastará desviarla antes del primer choque en una cantidad infinitamente pequeña de segundo orden, para que lo sea después del primer choque en una cantidad infinitamente pequeña de primer orden y después del segundo choque en una cantidad finita. La molécula no sufrirá solamente dos choques, sino un gran número por segundo. De modo que si el primer choque ha multiplicado la desviación por un gran número A , después de N choques, ella se habrá multiplicado por A ; llegará a ser muy grande no solamente porque A es grande, es decir, porque las pequeñas causas producen grandes efectos, sino porque el exponente N es grande, es decir, porque los choques son muy numerosos y las causas son muy complejas.

Pasemos a un segundo ejemplo: ¿por qué en una llovizna las gotas de agua nos parecen distribuídas al azar? Es también a causa de la complejidad de las causas que determinan su formación. Los iones se han desparramado en la atmósfera, durante largo tiempo han estado sometidos a corrientes de aire constantemente variables, han sido llevados en torbellinos de pequeñas dimensiones, de tal manera que su distribución final no tiene ninguna relación con su distribución inicial. De pronto la temperatura baja, el vapor se condensa y cada uno de estos iones se convierte en el centro de una gota de agua. Para saber cuál será la distribución de estas gotas de agua y cuántas caerán sobre cada baldosa, nos bastará conocer la situación inicial de los iones; claro es que para esto sería necesario computar el efecto de mil corrientes de aire caprichosas y minúsculas.

Es lo mismo que si se ponen granos de polvo en suspensión en el agua; el recipiente es surcado por corrientes de las cuales ignoramos la ley, al cabo de un cierto tiempo los granos habrán sido distribuídos al azar, es decir, uniformemente dentro del recipiente y será debido, principalmente, a la complicación de estas corrientes. Si obedecieran a cualquier ley simple, si por ejemplo el recipiente fuera de revolución y si las corrientes circularan alrededor del eje del recipiente describiendo círculos, no sería lo mis-

mo, puesto que cada grano conservaría su altura inicial y su distancia inicial del eje.

Se llegará al mismo resultado mezclando dos líquidos o dos polvos de granos finos. Tomando un ejemplo más grosero, es lo que sucede cuando se mezclan las cartas de un juego. A cada mezcla, las cartas sufren una permutación (análoga a la que se estudia en la teoría de las substituciones). ¿Cuál es la que se realizará? La probabilidad para que sea tal permutación (por ejemplo, que lleve al lugar n , la carta que ocupaba la línea ϕ (n) antes de la permutación), esta probabilidad depende de las costumbres del jugador. Pero si el jugador bate las cartas bastante tiempo, habrá un gran número de permutaciones sucesivas y el orden final no estará regido más que por el azar; quiero decir que todos los órdenes posibles serán igualmente probables. Es al gran número de permutaciones sucesivas, es decir a la complejidad del fenómeno, que se debe este resultado.

Una palabra sobre la teoría de los errores. Es aquí donde las causas son complejas y múltiples. ¡A cuántas asechanzas no está expuesto incluso el observador dotado del mejor instrumento! Se debe limitar a ver los más gruesos y evitarlos. Son los que dan nacimiento a los errores sistemáticos. Pero cuando los ha eliminado, admitiendo que lo consiga, le quedan aún muchos pequeños, pero que, acumulando sus efectos, pueden llegar a ser peligrosos. Es de aquí que provienen los errores accidentales; y los atribuimos al azar, porque sus causas son muy complicadas y numerosas.

Aquí aún no tenemos más que pequeñas causas, pero cada una de ellas no producirá más que un pequeño efecto; es por su unión y por su número que sus efectos llegan a ser terribles.

V

Nos podemos colocar todavía en un tercer punto de vista, que tiene menos importancia que los dos primeros y sobre el cual insistiré menos. Cuando se trata de prever un hecho y se examina los antecedentes, es necesario informarse sobre la situación anterior, pero no se lo podría hacer para todas las partes del Universo, hay que contentarse con saber qué sucede en la vecindad del punto en que se ha de producir el hecho, o lo que parezca tener cualquier relación con el hecho. Una encuesta no puede ser completa y hace falta saber elegir. Pero puede suceder que hayamos menospreciado las circunstancias que primero parecían completamente extrañas al hecho previsto, aquellas a las que no habíamos soñado nunca atribuir influencia alguna y que no obstante, contra todos nuestros cálculos, viene a desempeñar un papel preponderante.

Un hombre pasa por la calle dirigiéndose a sus negocios; alguien que estuviera al tanto de sus asuntos, podría decir con qué motivo ha salido a tal hora, por qué ha pasado por tal calle. Sobre el techo trabaja un pizarrero, el empresario que lo dirige podrá, en cierta medida, prever qué es lo que va a hacer. Pero el hombre no piensa en el pizarrero, ni el pizarrero en el hombre; parecen pertenecer a dos mundos completamente extraños el uno al otro. Y sin embargo, el pizarrero deja caer una pizarra que mata al hombre. No se dudará en decir que esto es un azar.

Nuestra debilidad no nos permite abarcar el Universo entero y nos obliga a dividirlo; tratamos de hacerlo lo menos artificialmente posible y, sin embargo, sucede de vez en cuando que dos de estos pedazos reaccionan el uno sobre el otro. Los efectos de esta acción mutua nos parecen entonces debidos al azar.

¿Es ésta una manera de concebir el azar? No siempre; en efecto, la mayoría de las veces se es atraído hacia la primera o a la segunda. Siempre que estos dos mundos generalmente extraños entre sí, reaccionan de esta manera

el uno sobre el otro, las leyes de esta reacción han de ser muy complejas; por otra parte habría bastado un pequeño cambio en las condiciones iniciales de estos dos mundos para que la reacción no se hubiese producido. Hubiera hecho falta poca cosa para que el hombre hubiera pasado un segundo más tarde, o para que el pizarrero dejara caer su pizarra un segundo después.

VI

Todo esto que acabamos de decir no nos explica aún por qué el azar acata ciertas leyes. ¿Basta solamente que las causas sean pequeñas, o que sean complejas, para que podamos prever si no cuales son los efectos *en cada caso*, por lo menos lo que serán estos efectos en un término medio? Para responder a este problema lo mejor es recurrir a algunos de los ejemplos antes citados.

Comenzaré por el de la ruleta. Dije que el punto en que se detendrá la aguja dependerá de la impulsión inicial que la haya sido dada. ¿Cuál es la posibilidad para que esta impulsión tenga tal o cual valor? No lo sé, pero me es difícil admitir que esta probabilidad esté representada por una función analítica continua. La probabilidad para que la impulsión esté comprendida entre a y $a + \epsilon$, será entonces semejante a la probabilidad para que esté comprendida entre $a + \epsilon$ y $a + 2\epsilon$, *siempre que ϵ sea muy pequeña*. Esta es una propiedad común a todas las funciones analíticas. Las pequeñas variaciones de la función son proporcionales a las pequeñas variaciones de la variable.

Pero lo hemos supuesto que una pequeñísima variación en la impulsión basta para cambiar el color del sector delante del cual la aguja acabará por detenerse. De a a $a + \epsilon$ es el rojo, de $a + \epsilon$ a $a + 2\epsilon$ es el negro; la probabilidad de cada sector rojo es entonces la misma que la del sector negro siguiente, y por consecuencia, la probabilidad total del rojo es igual a la probabilidad total del negro.

El enunciado de la cuestión es la función analítica que

representa la probabilidad de una impulsión inicial determinada. Pero el teorema permanece verdadero, cualquiera que sea el enunciado, puesto que depende de una propiedad común a todas las funciones análogas. Resulta, que finalmente no tenemos ninguna necesidad del enunciado.

Lo que acabamos de decir para el caso de la ruleta se aplica también en el ejemplo de los pequeños planetas. El Zodíaco puede hacer las veces de una inmensa ruleta sobre la cual el Creador ha lanzado un gran número de pequeñas bolas a las que ha comunicado impulsiones iniciales diferentes, variando según una ley cualquiera. Su distribución actual es uniforme e independiente de esta ley, por la misma razón que en el caso precedente. Se ve así por qué los fenómenos obedecen a las leyes del azar, cuando pequeñas diferencias en las causas bastan para producir grandes diferencias en los efectos. Las probabilidades de estas pequeñas diferencias pueden entonces ser tomadas como proporcionales a estas mismas diferencias, justamente porque estas diferencias son pequeñas y que los pequeños aumentos de una función continua son proporcionales a los de la variable.

Pasemos a un ejemplo totalmente diferente, en el que interviene sobre todo la complejidad de las causas; supongamos que un jugador mezcla una baraja de cartas. A cada mezcla intervierte el orden de las cartas y las puede intervertir de varias maneras. Supongamos tres cartas solamente para simplificar la exposición. Las cartas que antes de la mezcla ocupaban respectivamente los rangos 123, podrían después de la mezcla ocupar los rangos:

123, 231, 312, 321, 132, 213.

Cada una de estas seis hipótesis es probable y sus probabilidades son:

$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$.

La suma de estos seis números es igual a 1, es todo lo que sabemos; claro es que estas seis posibilidades dependen de las costumbres del jugador, las que, como es lógico, desconocemos.

En la segunda y siguientes mezclas se reptirá lo anterior en las mismas condiciones; me refiero a que p_4 , por

ejemplo, representa la posibilidad de que las tres cartas que ocupaban después del n mezcla y antes del $n + 1$ las filas 123, ocupan las filas 321 después del $n + 1$ mezclas. Esto permanece constante cualquiera que sea el número n , puesto que las costumbres del jugador y su modo de mezclar permanecen idénticas.

Pero si el número de mezclas es muy grande, las cartas que antes de la primera mezcla ocupaban las filas 123 podrán, después de la última mezcla, ocupar los sitios

123, 231, 312, 321, 132, 213

y la probabilidad de estas seis hipótesis será casi la misma e igual a $1/6$; ésta será verdadera, cualesquiera que sean los números $p_1 \dots p_2$, que no conocemos. El gran número de mezclas, es decir, la complejidad de las causas, ha producido la uniformidad.

Esto se aplicaría sin mayores variaciones si hubiera más de tres cartas, pero asimismo la demostración sería complicada; me contentaré con darla para dos cartas solamente. No tenemos, por lo tanto, más que dos hipótesis:

12, 21

con las probabilidades p_1 y $p_2 = 1 - p_1$. Supongamos n mezclas y supongamos también que gane un franco, si las cartas están al final en el orden inicial y que pierda uno si están finalmente intervertidas. Entonces mi esperanza matemática será:

$$(p_1 - p_2)^n$$

La diferencia $p_1 - p_2$ es más pequeña que 1; de manera que si n es muy grande, mi esperanza será nula, no necesitamos conocer p_1 y p_2 para saber que el juego es equitativo.

Existiría una excepción siempre que uno de los números p_1 y p_2 fuera igual a 1 y el otro nulo. *Esto no nos conduciría a nada, puesto que nuestras hipótesis iniciales serían demasiado simples.*

Lo que acabamos de ver no se aplica solamente a la mezcla de las cartas, sino a todas las mezclas, a las de polvos y líquidos; lo mismo que a la de las moléculas gaseosas en la teoría cinética de los gases. Volviendo sobre esta teoría, supongamos por un instante un gas cuyas moléculas no

pudieran entrechocarse, pero sí ser desviadas por choques sobre las paredes del vaso donde el gas está encerrado. Si la forma del vaso es suficientemente complicada, la distribución de las moléculas y las velocidades no tardarán en volverse uniformes. No sería lo mismo si el vaso fuera esférico o tuviera la forma de un paralelepípedo rectangular. ¿Por qué? Porque en el primer caso, la distancia del centro a una trayectoria cualquiera permanecerá constante; en el segundo caso, será el valor absoluto del ángulo de cada trayectoria con las caras del paralelepípedo.

Vemos así que lo que debemos entender por *condiciones muy simples* son las que dejan subsistir una invariante. ¿Son demasiado simples las ecuaciones diferenciales del problema para que podamos aplicarles las leyes del azar? Esta cuestión parece al principio desprovista de sentido, sabemos ahora lo que quiere decir. Son demasiado simples si conservan cualquier cosa, si admiten una integral uniforme; si cualquier cosa en las condiciones iniciales permanece inalterable, es claro que la situación final no podrá ser más independiente de la situación inicial.

Entremos por fin en la teoría de los errores. ¿A qué son debidos los errores accidentales? Los ignoramos y es justamente por eso que sabemos que van a obedecer a la ley de Gauss. Tal es la paradoja. Ello se explica *más o menos* como en los casos precedentes. No tenemos necesidad de saber más que una cosa: que los errores son muy numerosos, que son muy pequeños, que cada uno de ellos puede ser tanto negativo como positivo. ¿Cuál es la curva de probabilidades de cada uno de ellos? No sabemos nada, suponemos solamente que esa curva es simétrica. Se demuestra entonces que el error resultante es independiente de las leyes particulares que no conocemos. Aquí todavía la simplicidad del resultado es el fruto de la complicación misma de los enunciados.

VII

Pero aun no hemos llegado al fin de las paradojas. Hace un rato he presentado la ficción de Flammarión, aquella del hombre que va más ligero que la luz y para quien el tiempo ha cambiado de signo. Dije que para él todos los fenómenos parecerían debidos al azar. Esto es verdadero en un cierto punto de vista y no obstante todos estos fenómenos en un instante dado no serían distribuidos conforme a las leyes del azar, puesto que ellos serían, como para nosotros que, viéndolos desarrollarse armoniosamente y sin salir de un caos primitivo, no los miramos más que como regulados por el azar. ¿Qué significa esto? Para Lumen, el hombre creado por Flammarión, pequeñas causas producen grandes efectos, ¿por qué las cosas no se producen como para nosotros, cuando creemos ver grandes efectos debido a pequeñas causas? ¿El mismo razonamiento se podría aplicar a su caso?

Insistamos en este razonamiento; cuando pequeñas diferencias en las causas engendran grandes en los efectos, ¿por qué estos efectos se distribuyen, según las leyes del azar? Supongamos que una diferencia de un milímetro en la causa produce una diferencia de un kilómetro en el efecto. Si debemos ganar en el caso en que el efecto corresponda a un kilómetro que tenga un número par, nuestra posibilidad de ganar será $\frac{1}{2}$; ¿por qué?, pues porque hace falta para ello que la causa corresponda a un milímetro de número par. De acuerdo a las apariencias, la posibilidad para que la causa varíe entre ciertos límites será proporcional a la distancia entre estos límites, siempre que esa distancia sea muy pequeña. Si no se admitiera esta hipótesis no existiría una manera de representar la posibilidad por medio de una función continua.

¿Qué sucederá ahora cuando grandes causas produzcan pequeños efectos? Éste es el caso en que nosotros, por el contrario de Lumen, no lo atribuiríamos al azar. A una di-

ferencia de un kilómetro en la causa correspondería una de un milímetro en el efecto. ¿La posibilidad para que la causa esté comprendida entre dos límites distantes de n kilómetros, será proporcional a n ? No tenemos ninguna razón para suponerlo, puesto que esta distancia de n kilómetros es grande. Pero la posibilidad para que el efecto permanezca entre dos límites de n kilómetros, será precisamente la misma, no será entonces proporcional a n a pesar de que esta distancia de n milímetros sea pequeña. No hay por lo tanto medio alguno de representar la ley de posibilidad de los efectos en una curva continua; entendámoslo bien, esta curva podrá permanecer continua *en el sentido analítico de la palabra*. A variaciones *infinitamente pequeñas* de la abscisa, corresponderán variaciones infinitamente pequeñas de la ordenada. Pero *prácticamente* no sería continua, puesto que, a variaciones muy pequeñas de la abscisa, no corresponderían sino variaciones muy pequeñas de la ordenada. Tornaríase imposible trazar la curva con un lápiz común; he aquí lo que quiero decir.

¿Qué debemos deducir entonces? Lumen no tiene el derecho de decir que la posibilidad de la causa (la de *su* causa, que es el efecto para nosotros) deba ser representada necesariamente por una función continua. Pero entonces ¿por qué tenemos nosotros ese derecho? Es porque el estado de equilibrio inestable, que llamábamos antes inicial, no es sino el punto terminal de una larga historia anterior. En el transcurso de esta historia, causas complejas que obran y han obrado mucho tiempo, han contribuido a formar la mezcla de los elementos y han aspirado a uniformar todo, al menos en un pequeño espacio; han pulido los ángulos, nivelado las montañas y colmado los valles. Por caprichosa y regular que haya sido la curva primitiva que se le haya dado, han trabajado para regularizarla y nos devolverán finalmente una curva continua. Es por esto por lo que podemos con toda confianza admitir la continuidad.

Lumen no tendría los mismos motivos para deducir esto; para él las causas complejas no le parecerían más que agentes de regularidad y nivelamiento, no crearían,

por el contrario, más que la diferenciación y la desigualdad. Vería salir de una especie de caos primitivo un mundo más y más variado; los cambios que observarían serían imprevistos e imposibles de prever, le parecerían debidos a no sé qué capricho, pero este capricho sería cualquier otra cosa que nuestro azar, puesto que sería rebelde a toda ley, mientras que nuestro azar tiene aún las suyas. Todos estos puntos requerirían grandes desarrollos, que ayudarían, por otra parte, a comprender mejor la irreversibilidad del Universo.

VIII

Hemos tratado de definir el azar, conviene ahora plantearse una cuestión. El azar, habiendo sido definido así, en la medida que él puede serlo, ¿tiene un carácter objetivo?

Puede uno preguntárselo. He hablado de causas muy pequeñas o muy complejas, pero lo que es muy pequeño para uno, ¿no puede ser grande para otro?, y lo que parece ser complejo para uno, ¿no puede ser simple para otro? Ya he contestado en parte, puesto que dije antes de una manera precisa en qué caso las ecuaciones diferenciales se vuelven demasiado simples para que las leyes del azar permanezcan aplicables. Pero conviene examinar el asunto más detenidamente, pues se puede uno colocar aún en otros puntos de vista.

¿Qué significa la palabra muy pequeño? Basta para comprenderlo remitirse a lo que hemos dicho antes. Una diferencia es muy pequeña, un intervalo es muy pequeño, cuando en los límites de este intervalo la posibilidad permanece sensiblemente constante. Y ¿por qué esta posibilidad puede ser contemplada como constante en un pequeño intervalo? Es porque admitimos que la ley de posibilidades puede ser representada por una curva continua, y no solamente continua en el sentido analítico de la palabra, sino que prácticamente continua, como lo

expliqué antes. Esto quiere decir que no solamente no presentará un hiato absoluto, sino que no tendrá tampoco entrantes o salientes muy agudos o muy acentuados.

¿Y qué es lo que nos da el derecho a plantear esta hipótesis? Lo hemos dicho anteriormente, es porque desde el comienzo de los siglos hay causas complejas que no cesan de obrar en el mismo sentido y que aspiran constantemente a llevar al mundo hacia la uniformidad, sin que jamás pueda volverse hacia atrás. Son éstas las causas que, poco a poco, han vencido los salientes y relleno los entrantes, y es por esto que nuestras curvas de posibilidad no ofrecen más que ondulaciones lentas. Dentro de dos millones de millones de años se habrá dado un paso más hacia la uniformidad, y estas ondulaciones serán diez veces más lentas aún: el radio de curvatura medio de nuestra curva se habrá vuelto diez veces más grande. Y entonces esa longitud que hoy nos parece muy pequeña, puesto que sobre nuestra curva un arco de esta longitud no puede ser mirado como rectilíneo, deberá por el contrario en esa época ser calificado como muy pequeño, puesto que la curvatura se habría vuelto diez veces menor y un arco de esta longitud podrá ser sensiblemente asimilado a una recta. De esta manera, la palabra muy pequeña permanece relativa; pero no con respecto a tal hombre o a tal otro, es relativa al estado actual del mundo. Cambiará de sentido cuando el mundo llegue a ser más uniforme, cuando todas las cosas se hayan mezclado todavía más. Pero entonces los hombres no podrán vivir, deberán ceder su puesto a otros seres, ¿debo decir mucho más pequeños o mucho más grandes? De tal manera que nuestro criterio, permaneciendo verdadero para todos los hombres, conserva un sentido objetivo.

¿Qué quiere decir, por otra parte, la palabra muy complejo? He dado ya una solución, es la del comienzo de este párrafo, pero aun hay otras. Las causas complejas, ya lo hemos dicho, producen una mezcla cada vez más íntima, ¿pero al cabo de cuánto tiempo nos satisface esta mezcla? ¿Cuándo habremos acumulado bastantes satisfacciones? ¿Cuándo habremos mezclado bastante las cartas? Si mez-

clamos dos polvos, uno azul y otro blanco, llegará un momento en que el color de la mezcla nos parecerá uniforme; es a causa de lo enfermizo de nuestros sentidos, será uniforme para el présbita que está obligado a mirar de lejos e incluso lo será también para el miope. Y cuando llegue a serlo para todas las miradas, se podrá aún hacer retroceder el límite, mediante el empleo de instrumentos. No hay posibilidades para que ningún hombre discierna jamás la variedad infinita, que, si la teoría cinética es verdadera, se disimula bajo la apariencia uniforme de un gas. Mientras tanto, si se han adoptado las ideas de Gouy sobre el movimiento browniano, el microscopio, ¿no estará a punto de mostrarnos cualquier cosa análoga?

Este nuevo criterio es por lo tanto relativo como el primero y si conserva un carácter objetivo es porque todos los hombres tienen más o menos los mismos sentidos y que la potencia de sus instrumentos es limitada y no la utilizan, por otra parte, más que excepcionalmente.

IX

Sucede lo mismo en las ciencias morales y en particular en la historia. El historiador está obligado a hacer una elección de los acontecimientos de la época que estudia, no recoge más que aquellos que le parecen más importantes. Se contenta con relatar los acontecimientos más fundamentales del siglo XVI, por ejemplo, lo mismo que los hechos más descolantes del siglo XVII. Si los primeros bastan para explicar los segundos, se dice que están de acuerdo a las leyes de la historia. Pero si un gran acontecimiento del siglo XVII reconoce por causa un pequeño hecho del siglo XVI, al que ningún historiador se refiere, que todo el mundo ha negado, entonces se dice que este acontecimiento se debe al azar, esta palabra adquiere entonces el mismo sentido que en las Ciencias Físicas; significa que de pequeñas causas se han producido grandes efectos.

El mayor azar es el nacimiento de un gran hombre. No es más que por azar que se encuentran las dos células genitales, de sexo diferente, que contienen cada una precisamente los elementos misteriosos cuya mutua reacción ha de producir el genio. Estamos de acuerdo en que estos elementos deben ser raros y que su encuentro es más raro aún. Que hubiera hecho falta poca cosa para desviar de su ruta el espermatozoide que los llevaba, hubiera bastado desviarlo un décimo de segundo y Napoleón no hubiera nacido y los destinos de un continente habrían cambiado. Ningún otro ejemplo puede hacer comprender mejor los verdaderos caracteres del azar.

Una palabra más sobre las paradojas, que han dado lugar a la aplicación del cálculo de las posibilidades en las Ciencias Morales. Se ha demostrado que ninguna Cámara podría contener jamás ningún diputado de la oposición, o al menos que tal acontecimiento sería tan improbable que se podría sin temor apostar lo contrario y, aun más, apostar un millón contra un céntimo. Condorcet se ha esforzado en calcular cuántos jueces habrían hecho falta para que un error judicial llegara a ser imposible. Si se hubieran utilizado los resultados de este cálculo, se habría estado expuesto a las mismas decepciones que apostando sobre la fe del cálculo, que la oposición no habría tenido jamás ningún representante.

Las leyes del azar no se aplican a estos problemas. Si la justicia no se decide siempre por buenas razones, usa menos de lo que se cree del método de Bridoye; esto puede ser enojoso, puesto que entonces el sistema de Condorcet nos pondría a cubierto de los errores judiciales.

¿Qué quiere decir esto? Estamos tentados de atribuir al azar los hechos de esta naturaleza, debido a que las causas son oscuras, pero esto no es el verdadero azar. Las causas nos son desconocidas, es verdad, y ellas mismas son complejas, pero no lo son lo bastante, puesto que conservan alguna cosa; hemos visto que es esto lo que distingue a las causas simples. Cuando los hombres están aproximados, no deciden más por el azar, e independientemente los unos de los otros, reaccionan los unos sobre

los otros. Múltiples causas entran en acción, los azoran, los llevan de derecha a izquierda, pero hay una causa que no pueden destruir: son sus costumbres de corderos de Panurgo. Y esto es lo que permanece.

X

El empleo del cálculo de las probabilidades en las Ciencias exactas entraña también dificultades. ¿Por qué los decimales de una tabla de logaritmos los del número π son distribuidos conforme a las leyes del azar?

Ya he estudiado en otro lugar la cuestión en lo que respecta a los logaritmos, ahí eso es fácil, claro es que una pequeña diferencia sobre el argumento dará una pequeña diferencia sobre el logaritmo, pero una gran diferencia sobre la sexta decimal del logaritmo. Encontramos siempre el mismo criterio.

Pero para el número π esto presenta más dificultades; no tengo nada interesante por ahora que agregar.

Habrá muchas otras cuestiones que resolver, si quisiera abordarlas antes de haber resuelto las que me había propuesto especialmente.

Cuando constatamos un resultado simple, cuando encontramos un número redondo por ejemplo, decimos que un resultado parecido no puede ser debido al azar, y buscamos para explicarlo una causa no fortuita. Y en efecto, no hay más que una débil probabilidad para que entre diez mil números, el azar lleve un número redondo, el número diez mil, por ejemplo, tiene una posibilidad sobre diez mil. Pero tampoco hay más que una posibilidad sobre diez mil para que lleve cualquier otro número, y sin embargo, este resultado no nos sorprenderá, puesto que no nos repugnará atribuirlo al azar, simplemente porque chocará menos.

¿Existe por parte nuestra una simple ilusión, o hay casos en que esta manera de ver es legítima? Es preciso

esperarlo, porque sin esto toda Ciencia sería imposible. Cuando queremos controlar una hipótesis, ¿qué hacemos? No podemos verificar todas las consecuencias, puesto que serían infinitas; nos contentamos con verificar algunas y si lo logramos declaramos la hipótesis confirmada, porque tanto éxito no podría ser debido al azar. Y es en el fondo siempre el mismo razonamiento.

No puedo aquí justificarlo completamente, tardaría demasiado, pero puedo decir que nos encontramos en presencia de dos hipótesis, o, mejor dicho, de una causa simple, o bien de este conjunto de causas complejas que llamamos azar. Encontramos natural el admitir que la primera debe producir un resultado simple y entonces si constatamos este resultado simple, el número redondo por ejemplo, nos parece más verosímil atribuirlo a la causa simple que debía dárnoslo casi seguro, que al azar que no podría dárnoslo más que una vez sobre diez mil. No sucedería lo mismo si constatáramos un resultado que no fuera simple, es verdad que el azar no lo producirá más de una vez sobre diez mil, pero la causa simple no tienen más probabilidades de producirlo.

LIBRO SEGUNDO

EL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

CAPÍTULO PRIMERO

LA RELATIVIDAD DEL ESPACIO

I

Es imposible representarse el espacio vacío; todos los esfuerzos para imaginar un espacio puro, del que serían excluidas las imágenes variables de los objetos materiales, no pueden tener por resultado más que una representación en la que las superficies fuertemente coloreadas, por ejemplo, serían reemplazadas por líneas muy débilmente coloreadas, no se podría llegar hasta el final de esta senda sin que todo se desvaneciera y acabara en la nada. De ahí proviene la relatividad irreductible del espacio.

Cualquiera que hable del espacio absoluto, emplea una palabra carente de sentido.

Esta es una verdad proclamada desde hace mucho tiempo por todos los que han reflexionado sobre la cuestión, pero que muy a menudo olvidamos.

Estoy en un punto determinado de París, en la plaza del Panteón, por ejemplo. Digo: volveré aquí mañana. Si se me pregunta: ¿Entiende usted que volverá al mismo punto del espacio?, tendré ganas de contestar: Sí. Sin embargo, estaré equivocado, porque de aquí a mañana la Tierra se habrá trasladado, llevándose con ella la Plaza del Panteón, la que habrá recorrido más de dos millones de kilómetros. Si quisiera precisar mi lenguaje, no ganaría nada, puesto que estos dos millones de kilómetros los ha recorrido nuestro planeta en su movimiento con respecto al Sol, y éste, a su vez, se desplaza con relación a

la Vía Láctea, la cual sin duda tiene su movimiento sin que podamos conocer su velocidad. De tal manera, que ignoramos completamente cuánto se ha desplazado la Plaza del Panteón en un día. En consecuencia, he querido decir: Mañana veré de nuevo la cúpula y el frente del Panteón; y si no existiera más el Panteón, mi frase carecería de sentido y el espacio se desvanecería.

Es esta una de las formas, la más banal, del principio de la relatividad del espacio; pero hay otra, sobre la cual Delbeuf ha insistido particularmente. Supongamos que, en una noche, todas las dimensiones del Universo se vuelven más grandes: el mundo permanecerá semejante a él mismo, dándole a la palabra, semejanza el mismo sentido que en el tercer libro de Geometría. Solamente, lo que tenía un metro de largo, medirá en adelante un kilómetro, lo que medía un milímetro, medirá un metro. El lecho en que estoy acostado y mi cuerpo se habrán agrandado en la misma proporción; cuando me despierte a la mañana siguiente, ¿qué sentimiento experimentaré en presencia de tan sorprendente transformación? Pues sencillamente no me habré dado cuenta de nada. Las medidas más preciosas serán incapaces de revelarme nada de esta inmensa revolución, puesto que los metros de qué me serviría habrían variado en la misma proporción que los objetos que yo tratara de medir con ellos. En realidad, este trastorno no existe más que para los que razonan como si el espacio fuera absoluto. Si he razonado un instante de la misma manera que ellos es para hacer más comprensiva que su manera de ver implica contradicción. En realidad, sería más conveniente decir que, siendo el espacio relativo, no ha sucedido nada, y que es por esta razón que no nos hemos dado cuenta de nada.

¿Tenemos derecho en consecuencia para decir que se conoce la distancia entre dos puntos? No, puesto que la distancia podría sufrir enormes variaciones sin que pudiésemos darnos cuenta de ellas, siempre que las otras distancias hubieran variado en las mismas proporciones. Hace un momento, vimos que, cuando dije: Estaré aquí mañana, esto no quería decir: estaré mañana en el punto

del espacio en que estoy hoy; pero sí, estaré mañana a la misma distancia que hoy del Panteón. Y he aquí que este enunciado no basta, pues debo añadir: Mañana y hoy, mi distancia al Panteón será igual a un mismo número de veces el tamaño de mi cuerpo.

Pero no es esto todo; supuse que las dimensiones del mundo variaban, pero que por lo menos este mundo permanecería siempre semejante a él mismo. Se puede ir aún más lejos, y una de las teorías más sorprendentes de los físicos modernos nos va a ayudar en esta ocasión. Según Lorenz y Fitzgerald, todos los cuerpos acarreados en el movimiento de la Tierra experimentan una deformación. Esta deformación es muy pequeña, tanto que las dimensiones paralelas al movimiento de la tierra disminuirán en una cienmillonésima, mientras que las dimensiones perpendiculares a este movimiento no serán alteradas. Pero poco importa que sea débil, basta que exista para la conclusión a que voy a llegar dentro de poco. En otro lugar dije que era débil, pero en realidad no sé nada absolutamente; yo mismo fui víctima de la tenaz ilusión que nos hace creer que pensamos en un espacio absoluto; pensé en el movimiento de la Tierra sobre su órbita elíptica alrededor del Sol, y admití kilómetros para su velocidad. Pero a su verdadera velocidad (entiendo esta vez no su velocidad absoluta, que no tiene ningún sentido, sino su velocidad con respecto al éter) no la conozco, no tengo ningún medio de conocerla; es posible que sea diez, cien veces más grande y entonces la deformación será cien, diez mil veces más fuerte.

¿Podremos poner en evidencia esta deformación? Evidentemente que no; he aquí un cubo que tiene un metro de lado, a consecuencia del desplazamiento de la Tierra se deforma una de sus aristas, la que es paralela al movimiento se vuelve más pequeña, las otras no varían. Si quiero constatarlo con la ayuda de un metro, mediré primero una de las aristas perpendiculares al movimiento y constataré que mi metro se aplica exactamente sobre esta arista; y en efecto, ni una ni otra de estas dos longitudes está alterada, porque son perpendiculares al movimiento.

Quiero medir después la otra arista, la que es paralela al movimiento; para esto desplazo mi metro y lo hago girar de tal manera que pueda aplicarlo sobre mi arista. Pero el metro, habiendo cambiado de orientación, se ha vuelto paralelo al movimiento, ha sufrido, a su vez, la deformación, de manera que aunque la arista no tenga más que un metro de longitud, se aplicará exactamente y no me habrá dado cuenta de nada.

Se me preguntará entonces: ¿Cuál es la utilidad de la hipótesis Lorenz-Fitzgerald, si ninguna experiencia nos puede permitir verificarla? Es que me exposición ha sido incompleta; no he hablado más que de las medidas que se pueden hacer con un metro, pero se puede medir también una longitud por el tiempo que la luz tarda en recorrerla, con la condición de que se admita que la velocidad de la luz es constante e independiente de la dirección. Lorenz podría haberse dado cuenta de los hechos suponiendo que la velocidad de la luz es más grande en la dirección del movimiento de la Tierra que en la dirección perpendicular. Prefirió admitir que la velocidad es la misma en estas diversas direcciones, pero que los cuerpos son más pequeños en unas que en otras. Si las superficies de onda de la luz hubieran sufrido las mismas deformaciones que los cuerpos materiales, no nos hubiésemos dado cuenta de la deformación Lorenz-Fitzgerald.

Tanto en un caso como en el otro, no puede haber un problema de tamaño absoluto, sino de la medida de este tamaño por medio de un instrumento cualquiera: este instrumento puede ser un metro o el camino recorrido por la luz, sólo es la relación del tamaño con el instrumento lo que medimos; si esta relación es alterada, no tenemos ningún medio de saber si es el tamaño o el instrumento el que ha variado.

Pero lo que quiero hacer comprender es que en esta deformación el mundo no ha permanecido semejante a sí mismo; los cuadrados se han vuelto rectángulos o paralelogramos; los círculos, elipsis; las esferas, elipsoides. Y, sin embargo, no poseemos ningún medio para averiguar si esta deformación es real.

Es evidente que se podría ir mucho más lejos; en lugar de la deformación de Lorenz-Fitzgerald en la que las leyes son singularmente simples, se podría imaginar una deformación diferente. Los cuerpos podrían deformarse de acuerdo a leyes tan complicadas como quisiéramos, y no nos daríamos cuenta, siempre que todos los cuerpos, sin excepción, se deformaran siguiendo las mismas leyes, diciendo: todos los cuerpos sin excepción, incluido, como es lógico, nuestro cuerpo y los rayos luminosos emanados de los diversos objetos.

Si miráramos el mundo a través de uno de esos espejos de forma complicada que deforman los objetos de una manera extraña, las relaciones mutuas de las diversas partes de este mundo no serían alteradas: en efecto, si dos objetos reales se tocan, sus imágenes parecen realmente tocarse. Claro es que cuando nos miramos en un espejo semejante, vemos muy bien la deformación, pero es porque el mundo real subsiste al lado de su imagen deformada; entonces, aunque este mundo real nos fuera ocultado, hay algo que no se nos podría ocultar, es nosotros mismos. No podremos cesar de ver, o al menos de sentir, nuestro cuerpo y nuestros miembros que han sido deformados y que continúan sirviéndonos de instrumentos de medida. Pero si abstrayéndonos imaginamos que nuestro cuerpo se ha deformado, de igual manera que si se viera a través del espejo, este instrumento de medida nos fallaría también y la deformación no podrá ser por lo tanto comprobada.

He aquí dos universos que son la imagen uno del otro; a cada objeto P , del Universo A , corresponde en el universo B , un objeto P' , que es su imagen; las coordenadas de esta imagen P' son las funciones determinadas de por las del objeto P ; estas funciones pueden ser, por otra parte, cualesquiera; supongo solamente que se las ha elegido de una vez por todas. Entre la posición de P y la de P' hay una relación constante. ¿Qué relación es? Poco importa, basta que sea constante.

Estos dos universos serán indiscernibles el uno del otro. Quiero decir que el primero ha de ser para sus habitantes

lo que el segundo es para los suyos. Sería así mientras los dos universos permaneciesen extraños entre sí. Supongamos que vivimos en el universo A, habremos construido nuestra Ciencia y en particular nuestra Geometría; mientras tanto, los habitantes del universo B, habrán construido una Ciencia, y como su mundo es la imagen del nuestro, su Geometría será también una imagen de la nuestra, o, mejor dicho, será la misma. Pero si un día nos es abierta una ventana sobre el universo B, nos complaceremos de ellos: «Los desgraciados, exclamaremos, creían haber hecho una Geometría y esto que así llaman no es más que una imagen grotesca de la nuestra; sus rectas son tortuosas, sus círculos jorobados, sus esferas tienen desigualdades caprichosas». Y no es de dudar que ellos digan otro tanto de nosotros y no se sabrá nunca quién tiene razón.

Vemos en qué sentido debe ser entendida la relatividad del espacio; el espacio es en realidad amorfo y las cosas que están dentro de él le dan una sola forma. ¿Qué debemos pensar entonces de esta intuición directa que tendríamos de la recta o de la distancia? Tenemos tan poca intuición de la distancia en sí, que en una noche, lo hemos dicho, podría volverse mil veces más grande, sin que llegásemos a darnos cuenta si todas las otras distancias sufrirían una idéntica alteración. Lo mismo en una noche el universo B podría ser substituído por el universo A, sin que tuviésemos medio alguno para saberlo, entonces las rectas de ayer habrían cesado de ser rectas, sin que hubiéramos notado nada.

Una parte del espacio no es, en el sentido absoluto de la palabra, igual a otra parte del espacio, porque si lo es para nosotros no lo será para los habitantes del universo B, y éstos tienen precisamente tanto derecho de rechazar nuestra opinión como nosotros a condenar la suya.

Ya dije en otra parte cuáles son las consecuencias de estos hechos desde el punto de vista de la idea que debemos tener de la Geometría no-euclídea y de otras Geometrías análogas; no quiero insistir y hoy me colocaré en un punto de vista un poco diferente.

II

Si esta intuición de la distancia, de la dirección, de la línea recta, si esta intuición directa del espacio, en una palabra, no existe, ¿por qué creemos tenerla? Si no es más que una ilusión, ¿de dónde proviene que esta ilusión sea tan tenaz? Esto es lo que conviene examinar.

Hemos dicho que no hay intuición directa de la grandeza, que podemos sólo comprender la relación de esta grandeza con respecto a nuestros instrumentos de medida. No hubiéramos podido construir el espacio, si no hubiéramos tenido un instrumento para medirlo; pues bien: este instrumento, al cual relacionamos todo, del que nos servimos instintivamente, es nuestro propio cuerpo. Y es con relación a él que situamos los objetos exteriores, y las solas relaciones especiales de estos objetos que podamos representarnos no son más que relaciones con nuestro cuerpo. Es nuestro cuerpo, por así decir, quien nos sirve de sistema de ejes de coordenadas.

Por ejemplo, en un instante α , la presencia del objeto A me es revelado por el sentido visual; en otro instante β , la presencia de otro objeto B me es revelada por otro sentido, el del olfato o el del tacto, por ejemplo. Juzgo que este objeto B ocupa la misma posición que el objeto A. ¿Qué es lo que esto quiere decir? Primero no significa que estos dos objetos ocupen en dos instantes diferentes un mismo punto de un espacio absoluto, que si existiera, lo mismo escaparía a nuestro conocimiento, porque entre los instantes α y β el sistema solar se ha desplazado y no podríamos conocer su desplazamiento. Esto quiere decir que estos dos objetos ocupan la misma posición relativa con relación a nuestro cuerpo.

¿Pero esto qué es lo que quiere decir? Las impresiones que tenemos de estos objetos nos han llegado por conductos totalmente diferentes, el nervio óptico para el objeto A, el nervio acústico para el objeto B. Ellos no tienen nada en común desde el punto de vista cualitativo. Las

representaciones que nos podemos hacer de estos dos objetos son absolutamente heterogéneas, irreductibles la una de la otra. Solamente sé que para alcanzar el objeto A no tengo más que extender el brazo derecho de cierta manera; lo mismo que cuando me abstengo de hacerlo, me represento las sensaciones musculares y otras sensaciones análogas que acompañarían esta extensión, y esta representación está asociada a la del objeto A.

Ahora bien, sé igualmente que puede alcanzar el objeto B extendiendo el brazo derecho de la misma manera, extensión acompañada del mismo cortejo de sensaciones musculares. Cuando digo por lo tanto que estos dos objetos ocupan la misma posición, no quiero decir otra cosa.

Sé también que habría podido alcanzar el objeto A mediante otro movimiento apropiado del brazo izquierdo y me represento las sensaciones musculares que habrían acompañado este movimiento; mediante un movimiento igual del brazo izquierdo, acompañado de las mismas sensaciones, habría podido alcanzar lo mismo el objeto B.

Esto es muy importante, puesto que de esta manera podría defenderme contra los peligros que podrían acecharme, sea el objeto A, sea el objeto B. A cada uno de los golpes con que podríamos ser agredidos, la Naturaleza ha asociado una o varias defensas que nos permiten preservarnos.

Una misma defensa podría hacer frente a varios golpes; y así es que, por ejemplo, un mismo movimiento del brazo derecho nos habría permitido defendernos en el instante α contra el objeto A y en el instante β contra el objeto B. De igual modo, un mismo golpe puede ser parado de varias maneras, hemos dicho que podríamos alcanzar indiferentemente el objeto A, ya sea por cierto movimiento del brazo derecho o por cierto movimiento del brazo izquierdo.

Todas estas paradas no tienen nada de común entre sí, sino que permiten guarnecerse contra un mismo golpe, y es esto y nada más que esto lo que entendemos cuando nos dicen que son movimientos convergentes en un mismo punto del espacio. Lo mismo sucede con los

objetos de los que decimos que ocupan un mismo lugar en el espacio, no tienen nada en común, pero una misma guardia puede permitir defenderse contra ellos.

O si se quiere mejor, innumerables cables telegráficos, los unos centrípetos y los otros centrífugos. Los cables centrípetos nos previenen de los accidentes que se producen en el exterior, los cables centrífugos deben aportar el remedio. Las conexiones están establecidas de tal manera que cuando uno de los cables centrípetos es recorrido por una corriente, esta corriente obra sobre un poste intermedio y produce una corriente en uno de los cables centrífugos. Las cosas están arregladas de tal manera que varios cables centrípetos pueden obrar sobre un mismo cable centrífugo, si un mismo remedio remedia varios males, y que un cable centrípeto puede hacer estremecer varios cables centrífugos, sea simultáneamente, sea por defecto el uno del otro, siempre que un mismo mal pueda ser sanado mediante diversos remedios.

Es este complejo sistema de asociaciones, es este cuadro de distribución, por decir así, en quien reside toda nuestra geometría, o si se quiere todo lo que nuestra geometría tiene de intuitivo. Lo que llamamos nuestra intuición de la línea recta, o de la distancia, es la conciencia que tenemos de estas asociaciones y de su carácter imperioso.

¿De dónde proviene este carácter imperioso?, es fácil comprenderlo. Una asociación nos parecerá tanto más indestructible cuanto más antigua sea. Pero estas asociaciones no son, para la mayor parte, conquistas del individuo, puesto que se ve la huella en el niño recién nacido; estas son las conquistas de la raza. La selección natural ha debido traer estas conquistas tanto más veloces cuanto más necesarias hayan sido.

A este respecto, estas a que nos referimos han debido ser las primeras, puesto que sin ellas la defensa del organismo habría sido imposible. Desde el momento en que las células no han estado más yuxtapuestas, sino que se han visto obligadas a prestarse más ayuda mutua, ha sido necesario que se organizase un mecanismo análogo

al que acabamos de describir para que esta ayuda no se equivocara de camino y se adelantara al peligro.

Cuando se decapita una rana y se deja caer una gota de ácido en un lugar de la piel, trata de limpiarse el ácido con la pata más cercana y si esta pata le es amputada, se lo quita con la del lado opuesto. He aquí la doble defensa de que hablé antes, permitiendo combatir un mal con un segundo remedio si el primero falla. Y es de esta multiplicidad de guardias y de la coordinación correspondiente que resulta el espacio.

Se ve a qué profundidad de la subconsciencia es necesario descender para encontrar las primeras huellas de estas asociaciones espaciales, puesto que sólo las partes más inferiores del sistema nervioso entran en juego. ¿Cómo sorprendernos, por lo tanto, de la resistencia que nos oponen a toda tentativa hecha para disociar lo que después de tanto tiempo está asociado? Ahora bien, es esta misma resistencia que llamamos evidencia de las verdades geométricas: esta evidencia no es otra cosa que la resistencia que experimenta para romper con las viejas costumbres, las cuales nos han conformado siempre.

III

El espacio creado de esta manera no es más que un pequeño espacio que no se extiende más allá de lo que mi brazo puede abarcar; la intervención de la memoria es necesaria para alejar los límites. Hay puntos que permanecerán fuera de mi alcance, cualquiera que sea el esfuerzo que haga por extender la mano; si estuviera clavado en el suelo como un hidropólipo, por ejemplo, que no puede extender más que sus tentáculos, todos estos puntos estarían fuera del espacio, puesto que las sensaciones que podríamos experimentar, por la acción de los cuerpos que estarían colocados allí, no estarían asociadas a la idea de ningún movimiento que nos permitiera alcanzarlos. Estas sensaciones no nos parecerían tener nin-

gún carácter espacial y no trataríamos de localizarlas. Pero no estamos inmovilizados como los animales inferiores; podemos, si el enemigo está muy lejos, ir a él primero, y extender la mano cuando estemos lo bastante cerca. Esto es aún una parada, pero una parada de largo alcance. Por otra parte, es una parada compleja y en la representación que nos hemos hecho entra la representación de sensaciones musculares causadas por los movimientos de las piernas, las sensaciones musculares causadas por el movimiento del brazo, las sensaciones de los canales semicirculares, etc. Debemos representarnos, no un complejo de sensaciones simultáneas, sino un complejo de sensaciones sucesivas, que se suceden en un orden determinado, y es por eso que antes dije que la intervención de la memoria era necesaria.

Observemos también que para ir a un mismo punto puedo acercarme más a la meta para tener que extender menos la mano, ¿qué sé yo aún? Esto no es una, son mil paradas que puedo oponer a un mismo peligro. Todas estas paradas están formadas con sensaciones que pueden no tener nada en común y no obstante las miramos como definiendo un mismo punto del espacio, debido a que pueden enfrentar a este mismo peligro, además de estar asociadas entre sí a la noción de este peligro. Es la posibilidad de parar un mismo golpe lo que hace la unidad de estas diversas paradas, como asimismo la posibilidad de ser paradas de la misma manera lo que hace la unidad de los golpes de naturaleza tan diversa, que pueden amenazarnos desde un mismo punto del espacio. Es esta doble unidad la que hace la individualidad de cada punto del espacio y en la noción del punto no hay otra cosa.

El espacio que encaré en el párrafo precedente y que podría llamar el *espacio restringido*, estaba relacionado con los ejes de las coordenadas unidos a mi cuerpo; estos ejes eran fijos, puesto que mi cuerpo no se movía y mis miembros solamente se desplazaban. ¿Cuáles son los ejes a los cuales se refiere el espacio extendido?, es decir, el espacio nuevo que acabo de definir. Definimos un punto

por la serie de movimientos que hay que hacer para alcanzarlo a partir de una cierta posición inicial del cuerpo. Los ejes están ligados entonces a esta posición inicial del cuerpo.

Pero la posición que llamo inicial puede ser arbitrariamente elegida entre todas las posiciones que mi cuerpo ha ocupado sucesivamente; si la memoria más o menos inconsciente de estas posiciones sucesivas es necesaria para la génesis de la noción del espacio, esta memoria puede remontarse más o menos lejos en el pasado. De ahí resulta en la definición misma del espacio una cierta indeterminación y es precisamente esta indeterminación lo que constituye su relatividad.

No existe más el espacio absoluto, existe sólo el espacio relativo a una cierta posición inicial del cuerpo. Para un ser consciente, que estuviera fijo en el suelo como los animales inferiores y que por consiguiente no conociera más que el espacio restringido, el espacio sería aún relativo (puesto que se relacionaría a su cuerpo), pero este ser no tendría conciencia de esta relatividad, puesto que los ejes a los cuales se referiría este espacio restringido no cambiarían. Sin duda, la roca a la cual este ser estaría encadenado no estaría inmóvil, puesto que sería arrastrada en el movimiento de nuestro planeta; para nosotros, por consiguiente, estos ejes cambiarían a cada instante; pero para él no cambiarían. Tenemos la facultad de relacionar nuestro espacio extendido tanto a la posición A de nuestro cuerpo como a la posición B, que tenía algunos instantes después y que estamos libres de mirar a su turno como inicial; hacemos a cada instante cambios inconscientes de coordenadas. De esta facultad carecería nuestro ser imaginario y como no habría viajado creería en el espacio absoluto; a cada instante su sistema de ejes le sería impuesto; aunque este sistema cambiara en realidad, para él sería siempre el mismo, puesto que él sería siempre el sistema único. No es lo mismo para nosotros que a cada instante poseemos varios sistemas entre los cuales podemos elegir a voluntad, con la con-

dición de remontarse mediante la memoria más o menos lejos en el pasado.

Esto no es todo, el espacio restringido no sería homogéneo; los diversos puntos de este espacio no podrían ser considerados como equivalentes, puesto que unos no podrían ser alcanzados sino mediante los más grandes esfuerzos, mientras que otros lo serían fácilmente. Por el contrario nuestro espacio extendido se nos aparece como homogéneo y decimos que todos los puntos en él son equivalentes. ¿Qué es lo que esto quiere decir?

Si partimos de una cierta posición A, podemos, a partir de esta posición, efectuar ciertos movimientos M, caracterizados por un cierto complejo de sensaciones musculares. Pero a partir de otra posición B, no podremos ejecutar los movimientos M', que estarán caracterizados por las mismas sensaciones musculares. Sea entonces a la situación de cierto punto del cuerpo, de la punta del índice de la mano derecha, por ejemplo, en la posición inicial A, sea b la situación de este mismo índice, cuando partiendo de esta posición A, se han ejecutado los movimientos M. Sea después a' la situación de este índice en la posición B, y b' su situación cuando partiendo de la posición B, se han ejecutado los movimientos M'.

¡Pues bien!, tengo la costumbre de decir que los puntos del espacio a y b son entre ellos como los puntos a' y b', esto significa simplemente que las dos series de movimientos M y M' están acompañados de las mismas sensaciones musculares. Como comprendo que pasando de la posición A a la posición B, mi cuerpo es capaz todavía de efectuar los mismos movimientos, sé que hay un punto en el espacio que es con respecto al punto a', lo que un punto b cualquiera es con respecto al punto a, de tal manera que los dos puntos a y a' son equivalentes. Esto es lo que llamamos la homogeneidad del espacio. Y al mismo tiempo es merced a esto que el espacio es relativo, puesto que sus propiedades permanecen iguales, ya se lo relacione con los ejes A o con los ejes B. De manera que podemos decir que la relatividad del espacio y su homogeneidad son una sola y misma cosa.

Ahora sí quiero pasar al gran espacio, que no sirve sólo para mí, pero en el que se puede albergar al Universo, tendré que llegar por medio de un acto de imaginación. Me imaginaré lo que experimentará un gigante que pudiera alcanzar los planetas con sólo andar unos pasos; o si se quiere lo que yo mismo sentiría en presencia de un mundo en miniatura, en que los planetas serían reemplazados por pequeñas bolas, mientras que sobre una de estas pequeñas bolas se agitaría un pequeño liliputiense al que llamaría yo. Pero este acto de imaginación me sería imposible si no hubiese construido antes provisoriamente mi espacio restringido y mi espacio extenso, para mi uso personal.

IV

¿Por qué ahora todos estos espacios tienen tres dimensiones? Volvamos al «tablero de distribución» del que hablamos antes. Tenemos de un lado los diferentes peligros, designémoslos por A1, A2, etc., del otro lado de la lista los diferentes remedios, que llamaremos B1, B2, etc. Tenemos después las conexiones entre los transmisores de la primera lista y los de la segunda, de manera que cuando el avisador del peligro A3 funciona, podrá poner en oscilación el poste correspondiente a la guardia B4.

Como antes me referí a cables centrípetos o centrifugos, temo que no se vea en todo esto, no una simple comparación, sino una descripción del sistema nervioso. No es este mi pensamiento, por varias razones: primero no me permitiría enunciar una opinión sobre la estructura del sistema nervioso, que desconozco, mientras que los que lo han estudiado no lo han hecho sino con mucha prudencia; después porque, a pesar de mi incompetencia, veo que este esquema sería demasiado simplista; y en fin, puesto que sobre mi lista de paradas figuran algunas muy complejas que podrían lo mismo, en los casos del espacio extenso, como hemos visto antes, estar formadas

por varios momentos seguidos de un movimiento de brazo. No se trata entonces de la conexión física entre dos conductores reales, sino de la asociación psicológica entre dos series de sensaciones.

Si A1 y A2, por ejemplo, están uno y otro asociados a la parada B1 y si A1 está asociado a la parada B2, sucederá generalmente que A2 y B2 estén también asociados. Si esta ley fundamental no fuera generalmente verídica, no existiría más que una intensa confusión y no habría nada que pudiera parecerse a una concepción del espacio o a una Geometría. ¿Cómo definiríamos, en efecto, un punto del espacio? Lo hemos hecho de dos maneras: por una parte el conjunto de los avisadores A que están en conexión con una misma parada B; por otra parte el conjunto de paradas B que están en conexión con un mismo avisador A. Si nuestra ley no fuera verdadera, debería decirse que A1 y A2 corresponden a un mismo punto, puesto que están los dos en conexión con B1; pero se debería decir igualmente que no corresponden a un mismo punto porque A1 estaría en conexión con B2 y no sucedería lo mismo con A2. Esto sería una contradicción.

Pero por otro lado si la ley fuera siempre rigurosa y verdadera, el espacio sería muy diferente de lo que es. Tenemos dos categorías bien separadas entre las cuales se repartirían por una parte los avisadores A y por otra parte las paradas B; estas categorías serían excesivamente numerosas, pero estarían completamente separadas entre sí. El espacio estaría formado por puntos muy numerosos pero discretos, serían discontinuos. No hay razón para ordenar estos puntos en un orden más que en otro, ni por consiguiente atribuir al espacio más de tres dimensiones.

Pero esto no es así; permítaseme volver a tomar un instante el lenguaje de las gentes versadas en Geometría; es necesario porque es la lengua que entenderán mejor aquellos de quienes trato de hacerme entender. Cuando quiero para el golpe, trataré de alcanzar el punto de donde proviene ese golpe, pero basta que me aproxime lo bastante cerca; entonces la parada B1 podrá res-

ponder a A1 y a A2, si el punto que corresponde a B1 está suficientemente cerca del que corresponde a A1 y del que corresponde a A2. Pero podrá suceder que el punto que corresponde a otra parada B2, sea vecino del punto correspondiente a A1 y lo sea bastante del punto correspondiente a A2. De manera que la parada B2 pueda responder a A1 sin poder responder a A2.

Para el que no conoce aún la Geometría esto se traducirá simplemente por una derogación de la ley enunciada antes. Entonces las cosas pasarán de la manera siguiente: dos paradas B1 y B2 estarán asociadas a un mismo aviso A1 y a un gran número de avisos que colocaremos en la misma categoría que A1 y que haremos corresponder a un mismo punto del espacio. Pero no podremos encontrar los avisos A2 que estarán asociados a B2 sin serlo a B1 y que en desquite lo serán a B3, el cual B3 no estaba asociado a A1, y así sucesivamente de tal forma que podamos escribir la serie

B1, A1, B2, A2, B3, A3, B4, A4

en que cada término está asociado al siguiente y al precedente, pero no con los términos que distan varias filas.

Es inútil añadir que cada uno de los términos de estas series no está aislado, sino que forma parte de una numerosa categoría de otros avisadores o de otras paradas que tienen las mismas conexiones que él y que se pueden considerar como pertenecientes a un mismo punto del espacio. La ley fundamental con sus excepciones permanece por lo tanto casi siempre verdadera. Solamente, a consecuencia de estas excepciones, estas categorías, en vez de estar completamente separadas, se usurpan parcialmente entre sí y se penetran mutuamente en una cierta medida, de manera que el espacio llega a ser continuo.

Por otra parte, el orden en el cual estas categorías deben ser ordenadas no es arbitrario y si las llevamos de nuevo a la serie precedente, se ve que hace falta ordenar B2 entre A1 y A2 y por consiguiente entre B1 y B3, y no se podría, por ejemplo, colocarlo entre B3 y B4.

Hay entonces un orden en el cual se ordenan naturalmente nuestras categorías que corresponden a los puntos

del espacio; la experiencia nos enseña que este orden se presenta en la forma de un cuadro de triple entrada, es por esta razón que el espacio tiene tres dimensiones.

V

De esta manera característica del espacio, la de tener tres dimensiones no es nada más que una propiedad de nuestro cuadro de distribución, una propiedad interna, por así decir, de la inteligencia humana. Bastará destruir algunas de estas conexiones, es decir, de estas asociaciones de ideas para tener un cuadro de distribución diferente y esto podría bastar para que el espacio adquiriera una cuarta dimensión.

Algunas personas se sorprenderán de tal resultado. El mundo exterior, pensarán, debe servir para algo. Si el número de las dimensiones proviene de nuestra conformación, podría haber otros seres conscientes que vivieran en nuestro mundo, pero que estuvieran hechos de distinta manera que nosotros y que creyeran que el espacio tiene más o menos de tres dimensiones. El Sr. de Cyon ¿no dijo que los ratones japoneses no tenían más que dos pares de canales semicirculares, por lo que creían que el espacio no tenía más que dos dimensiones? Y entonces, si este ser consciente es capaz de construir una Física, no va a hacer una Física de dos o cuatro dimensiones y que en un sentido sería sin embargo la misma que la nuestra, puesto que sería la descripción del mundo en el mismo lenguaje.

Parece en efecto que sería posible traducir nuestra Física en el lenguaje de la geometría de cuatro dimensiones; tratar de hacer esta traducción sería tomarse demasiado trabajo para muy poco provecho; me limitaré a citar la Mecánica de Hertz, en la que se ve algo análogo. Entre tanto, parece que la traducción sería siempre menos simple que el texto, que tendría siempre el aire de una traducción, que la lengua de tres dimensiones parece la más apropiada para la descripción de nuestro mundo, aunque

esta descripción pueda hacerse en último caso en otro idioma.

Además, no es por azar que nuestro cuadro de distribución se ha constituido. Hay conexión entre el aviso A1 y la parada B1; esta es una propiedad interna de nuestra inteligencia, pero ¿por qué esta conexión? Es porque la parada B1 permite efectivamente defenderse contra el peligro A1; esto es un hecho exterior a nosotros, es una propiedad del mundo exterior. Nuestro cuadro de distribución no es entonces más que la traducción de un conjunto de hechos exteriores; si tiene tres dimensiones es porque se ha adaptado a un mundo que tenía ciertas propiedades; la principal de estas propiedades es la que existe en los sólidos naturales en que los desplazamientos se hacen siguiendo sensiblemente las leyes que llamamos leyes del movimiento de los sólidos invariables. Si entonces la lengua de tres dimensiones es la que nos permite más fácilmente describir nuestro mundo, no debemos sorprendernos, esta lengua está calcada sobre nuestro cuadro de distribución; y es a fin de poder vivir en este mundo que este cuadro ha sido establecido.

He dicho que podríamos concebir viviendo en nuestro mundo seres conscientes, cuyo cuadro de distribución fuera de cuatro dimensiones y que por consiguiente pensarían en el hiperespacio. No es posible que seres parecidos, admitiendo que ellos nazcan, pudieran vivir y defenderse contra los mil peligros de que se verían amenazados.

VI

Algunas advertencias para acabar. Existe un contraste sorprendente entre lo burdo de esta Geometría primitiva que se reduce a lo que llamo un cuadro de distribución, y la precisión infinita de la Geometría de los geómetras. No obstante, aquélla ha dado origen a ésta; pero no sólo de ella, ha sido necesario que fuera fecundada por la facultad que tenemos para construir los conceptos matemáticos, tales

como el de grupos por ejemplo, ha sido preciso buscar entre los conceptos puros el que se adaptara mejor a este grosero espacio, del cual he tratado de explicar la génesis en las páginas precedentes y que nos es común con los animales superiores.

La evidencia de ciertos postulados geométricos no es, dijimos, más que la repugnancia que sentimos a renunciar a muchas viejas costumbres. Pero estos postulados son infinitamente precisos, mientras que estas costumbres tienen alguna cosa esencialmente floja. Desde que queremos pensar, nos hacen falta postulados infinitamente precisos, puesto que es el sólo medio de evitar la contradicción; pero en medio de todos los sistemas de postulados posibles hay algunos que nos repugnaría elegir, puesto que ellos no concordarían lo suficiente con nuestras costumbres, por suaves y elásticas que fuesen, tienen un límite de elasticidad. Hemos visto que si la Geometría no es una ciencia experimental, es una ciencia nacida con motivo de la experiencia, que hemos creado en el espacio que ella estudia pero adaptándola al mundo en que vivimos. Hemos escogido el espacio más cómodo, pero es la experiencia lo que ha guiado nuestra elección. Como esta elección ha sido inconsciente, nos parece que nos ha sido impuesta, los unos dicen que es la experiencia quien nos la impone, los otros que nacemos con nuestro espacio hecho, vamos, después de las consideraciones precedentes, cual es en estas dos opiniones, la parte de la verdad y la del error.

En esta educación progresiva que ha conducido a la construcción del espacio, ¿cuál es la parte del individuo y cuál es la parte de la raza? Difícil es determinarlo. ¿En qué medida uno de nosotros, transportado desde su nacimiento a un mundo enteramente diferente, donde, por ejemplo, dominarían los cuerpos que se desplazan de acuerdo a las leyes de movimientos de los sólidos no-euclídeos, en qué medida, digo, podría renunciar al espacio ancestral para construir un espacio completamente nuevo?

La parte de la raza parece preponderante; si es a ella que debemos el espacio grosero, el espacio ligero del que hablé antes, el espacio de los animales superiores, ¿no es

a la experiencia inconsciente del individuo que debemos el espacio infinitamente preciso del geómetra? Es una cuestión difícil de resolver. Citemos, no obstante, un hecho que demuestra que el espacio que nos legaron nuestros antecesores aún conserva una cierta plasticidad.

Ciertos cazadores aprenden a tirar a los peces bajo el agua, a pesar que la imagen de estos peces les sea trastornada por la refracción. Lo hacen, por otra parte, instintivamente: han aprendido a modificar su antiguo instinto de la dirección, o, si queremos substituir la asociación A_1 , B_1 , por otra asociación A_1 , B_1 , puesto que la experiencia les ha enseñado que la primera no tenía éxito.

CAPÍTULO II

LAS DEFINICIONES MATEMÁTICAS Y LA ENSEÑANZA

1º Debo referirme aquí a las definiciones generales en matemáticas; esto, al menos, lo que dice el título del capítulo, pero me será imposible limitarme a este tema tanto como lo exigiría la ley de la unidad de acción. No podría tratarlo sin hablar un poco de otros problemas vecinos, y si estoy de esta manera obligado a andar de vez en cuando en las cornisas de derecha a izquierda, os ruego que me lo perdonéis.

¿Qué es una buena definición? Para el filósofo o para el sabio es una definición que se aplica a todos los objetos definidos y que no se aplica más que a ellos, lo que satisface las reglas de la Lógica. Pero en la enseñanza esto no lo es; una buena definición es la que es comprendida por los alumnos. ¿Cómo se hace para que haya tantos espíritus que se rehusen a comprender las Matemáticas? ¿No hay aquí algo paradójal? He aquí una ciencia que no apela sino a los principios de la Lógica, al principio de contradicción, por ejemplo, a este que es, por así decir, el esqueleto de nuestro entendimiento, a este cuya ausencia implicaría la del pensar; ¡y hay gentes que la encuentran obscura, y son la mayoría! Que ellos sean incapaces de inventar, pase aún, pero que sean incapaces de comprender las demostraciones que se les hacen, que permanezcan ciegos cuando les presentamos una luz que nos parece brillar con puro fulgor, esto es sencillamente prodigioso.

Y, sin embargo, no se requiere tener una gran experiencia de los exámenes para saber que estos ciegos no son

de ninguna manera seres de excepción. He aquí un problema que no es fácil de resolver, pero que debe preocupar a todos los que pudieran consagrarse a la enseñanza.

¿Qué es comprender? ¿Tiene esta palabra el mismo sentido para todo el mundo? ¿Comprender la demostración de un teorema es examinar sucesivamente cada uno de los silogismos de que se compone y constatar que es correcto, según las reglas del juego? ¿Lo mismo comprender una definición es solamente reconocer que se sabe el sentido de todos los términos empleados y comprobar que ello no implica ninguna contradicción?

Sí, para algunos, cuando hayan hecho esta constatación, dirán: he comprendido. No para la mayor parte. Porque casi todos son mucho más exigentes, quieren saber, no solamente si todos los silogismos de una demostración son correctos, sino porque se encadenan en tal orden y no en tal otro. Tanto que parecerán engendrados por el capricho y no por una inteligencia constantemente consciente de la meta a alcanzar creen no haber comprendido.

Indudablemente no se dan cuenta exactamente de qué es lo que reclaman, y no serían ni siquiera capaces de formular su desco, pero si no están satisfechos, sienten vagamente que alguna cosa les falta. ¿Qué sucede entonces? Al principio descubren todavía las evidencias que se ponen ante sus ojos; pero como no están unidas más que por un vínculo demasiado unido a las que preceden y a las que siguen, pasan sin dejar huellas en su cerebro; son inmediatamente olvidadas; iluminadas por un instante, vuelven a sumergirse en seguida en una noche eterna. Cuando estén más avanzados no verán ni siquiera esta luz efímera, porque los teoremas se apoyan los unos sobre los otros y los que necesitarían, habrían sido ya olvidados; es de esta manera cómo llegan a ser incapaces de comprender las Matemáticas.

No es siempre por culpa del profesor, a menudo es su inteligencia, que necesita ver el hilo conductor, pero es demasiado perezosa para buscarlo y encontrarlo. Pero para ayudarla, hace falta que comprendamos bien qué es lo que los detiene.

Muchos se preguntarán siempre para qué sirve esto. No habrán comprendido si no encuentran alrededor de ellos, en la práctica o en la Naturaleza, la razón de ser de tal o cual razón matemática. Bajo cada palabra quisieran poner una imagen sensible; es preciso que la definición evoque esta imagen, que a cada estado de la demostración ellos la vean transformarse y evolucionar. Con esta condición solamente comprenderán y retendrán. A menudo, ellos mismos se hacen la ilusión; no escuchan los razonamientos, miran las figuras; se imaginan haber comprendido y no han hecho más que ver.

2º ¿Cuántas tendencias debemos combatir? Y en este caso, ¿a cuál habría que favorecer? A los que se contentan con la lógica pura, ¿será necesario enseñarles que no han visto más que una cara de las cosas? O bien, ¿hace falta decir a los que no se satisfacen con tan poco que lo que reclaman no es necesario?

En otros términos, ¿debemos tratar que los jóvenes cambien la naturaleza de su espíritu? Una tentativa parecida sería vana; no poseemos la piedra filosofal, que nos permitiría transmutar los metales que nos han sido confiados; todo lo que podemos hacer es trabajarlos acomodándonos a sus propiedades.

Muchos niños son incapaces de llegar a ser matemáticos; a pesar de ello es necesario enseñárselas; los matemáticos, ellos mismos no son todos iguales. Basta leer sus obras para distinguir dos clases de espíritus, los lógicos como Weierstrass, por ejemplo, y los intuitivos como Riemann, la misma diferencia entre nuestros estudiantes. Unos prefieren tratar sus problemas «por el análisis», como dicen, y los otros «por la Geometría».

—Es inútil tratar de cambiar cualquier cosa, y esto por otra parte, ¿sería conveniente? Es bueno que haya lógicos e intuitivos; ¿quién osaría decir que quisiera que Weierstrass no hubiese jamás escrito o que no hubiera habido un Riemann? Es preciso, entonces, resignarnos con la diversidad de espíritus, o mejor dicho, es preciso alegrarnos.

3º Puesto que la palabra comprender tiene varios sentidos, las definiciones que serán mejor comprendidas por

unos no serán las que convendrán a los otros. Tenemos los que tratan de hacer nacer una imagen y los que se limitan a combinar las dos formas vacías, perfectamente comprensivas, puramente inteligibles, pero que la abstracción ha privado de toda materia.

No sé si es necesario citar ejemplos. Citémoslos sin embargo, primero la definición de las fracciones nos va a proveer de un ejemplo extremo. En las escuelas primarias para definir una fracción se corta una manzana o una torta; se la corta por supuesto por medio del pensamiento y no en la realidad, porque presumo que los fondos de la enseñanza primaria no permiten tal prodigalidad. En la Escuela Normal Superior, por el contrario, o en las Facultades, se dirá: una fracción es el conjunto de dos números enteros separados por un trazo horizontal; se definirá por convenciones que puedan sufrir estos símbolos; se demostrará que las reglas de estas operaciones son las mismas en el cálculo de los números enteros y se constatará, en fin, que efectuado de acuerdo a estas reglas, la multiplicación de la fracción por el denominador, se encuentra el numerador. Esto está muy bien, puesto que se encamina a los jóvenes, después de largo tiempo de estar familiarizados con la noción de las fracciones a fuerza de haber partido manzanas u otros objetos, donde el espíritu, afinado por una fuerte educación matemática, ha llegado poco a poco a desear una definición puramente lógica. ¿Pero, cuál no sería el desconcierto del principiante a quien se la quisiera servir?

Tales son las definiciones que encontráis en un libro con justicia admirado y muchas veces coronado: Los «Grudlagen der Geometrie», de Hilbert. Veamos, en efecto, cómo comienza: PENSEMOS TRES SISTEMAS DE COSAS QUE LLAMAREMOS PUNTOS, RECTAS Y PLANOS. ¿Qué son estas cosas? No lo sabemos, y no tenemos que saberlo, incluso sería inconveniente el que tratáramos de saberlo; todo lo que tenemos derecho a saber es lo que nos enseñan los AXIOMAS, éste, por ejemplo: *Dos puntos diferentes determinan siempre una recta*, que es seguida de este comentario: *En lugar de determinar, podemos decir pasa*

por estos dos puntos; o que ella junta estos dos puntos, o que los dos puntos están situados en la recta. Así «estar situado sobre una recta» está definido como sinónimo de determinar una recta. He aquí un libro que me parece muy bueno, pero que no recomendaría a ningún estudiante de Liceo. Por otra parte, pensándolo bien, podría hacerlo sin temor, pues no creo que prolongara mucho su lectura.

He tomado ejemplos tan extremos, que ningún maestro podría soñar en ir tan lejos.

Pero aun permaneciendo alejados de estos modelos, ¿no está expuesto al mismo peligro?

Estamos en una clase de cuarto año; el profesor dicta: el círculo es la unión de los puntos del plano que están situados a la misma distancia de un punto interior llamado centro. El buen alumno escribe esta frase en su cuaderno; el mal alumno dibuja monigotes; ni el uno ni el otro han comprendido; entonces el profesor toma la tiza y traza un círculo sobre el pizarrón. ¡Ah!, piensan los alumnos, ¿por qué no lo dijo antes? Un círculo es un redondel, lo habríamos comprendido. Sin duda es el profesor quien tiene razón. La definición de los alumnos no habría tenido ningún valor, puesto que no habría servido para ninguna demostración, y, sobre todo, porque no habría podido darles la saludable costumbre de analizar sus concepciones. Sería necesario enseñarles que no comprenden lo que ellos creen que comprenden sin darse cuenta de su grosero concepto primitivo y a que desearan ellos mismos que se lo purificaran y se lo pulieran.

4º Volveré sobre todos estos ejemplos; he querido sólo mostraros las dos concepciones opuestas; hay entre ellas un violento contraste. Este contraste la historia de la Ciencia nos lo explica. Si leemos un libro escrito hace cincuenta años, la mayor parte de los razonamientos que encontremos nos parecerán desprovistos de actualidad. Se admitía en esa época que una función continua no podía cambiar de signo sin anularse; hoy se demuestra. Se admitía que las reglas comunes del cálculo se aplicaban a los números incommensurables; se lo demuestra hoy. Admitíamos también cosas que a veces han resultado falsas.

Se fiaba de la intuición, pero la intuición no puede darnos la seguridad ni la certeza; nos hemos dado cuenta cada vez más y más. Nos enseña, por ejemplo, que toda curva a una tangente, es decir, que toda función continua es una derivada, y esto es falso. Y como teníamos la certeza, ha sido necesario reducir cada vez más la parte de la intuición.

¿Cómo se ha hecho necesaria esta evolución? No hemos tardado en darnos cuenta que la seguridad no podría establecerse en los razonamientos, si no se la hiciera entrar primero en las definiciones.

Durante mucho tiempo, los objetos de que se ocupaban los matemáticos estaban mal definidos; se creía conocerlos porque se los representaba con los sentidos o con la imaginación, pero no era más que una imagen grosera y no una idea precisa sobre la cual podían basarse los razonamientos.

Es hacia allí que los lógicos han debido llevar sus esfuerzos. Tal como para el número inconmensurable.

La vaga idea de continuidad, que debíamos a la intuición, se ha resuelto en un sistema complicado de desigualdades sostenidas por números enteros. Es de esta manera cómo se han desvanecido definitivamente todas las dificultades que asustaban a nuestros padres, cuando reflexionaban en los fundamentos del cálculo infinitesimal.

Hoy, en análisis no quedan más que los números enteros o los sistemas finitos o infinitos de números enteros reunidos por una red de igualdades y desigualdades.

Las matemáticas, como hemos dicho, se han aritmetizado.

5º Pero, ¿creen que las matemáticas hayan alcanzado la seguridad absoluta sin ningún sacrificio? Nada de eso; lo que han ganado en seguridad lo han perdido en objetividad. Es alejándose de la realidad que han adquirido esta pureza perfecta. Se puede recorrer libremente todo su dominio, antes erizado de obstáculos, pero estos obstáculos no han desaparecido. Han sido solamente transportados a la frontera, donde falta vencerlos de nuevo si se la quiere franquear y penetrar en el reino de la práctica.

Se poseía una vaga noción formada de elementos dispa-

res, los unos a priori, los otros provenientes de experiencias más o menos digeridas; se creía conocer, por la intuición, las principales propiedades. Hoy se rechazan los elementos empíricos no conservando más que los elementos a priori; es una de las propiedades que sirven de definición y todas las otras se deducen por un riguroso razonamiento. Esto está muy bien; pero falta demostrar que esta propiedad, que ha llegado a ser una definición, pertenece a los objetos reales que la experiencia nos ha hecho conocer y de donde hemos sacado nuestra vaga noción intuitiva. Para probarlo, será necesario recurrir a la experiencia, o hacer un esfuerzo de intuición, y si no podemos probarlo, nuestros teoremas serán perfectamente rigurosos, pero perfectamente inútiles.

La lógica algunas veces engendra monstruos. Después de medio siglo se ha visto surgir una turba de funciones caprichosas que parecían esforzarse en parecerse lo menos posible a las honestas funciones que sirven para algo.

Más continuidad, o mejor dicho de continuidad, pero no de derivadas, etc. Más aún desde el punto de vista lógico, estas funciones extrañas son las más generales, las que se encuentran sin haberlas buscado y no aparecen más que como caso particular. No les queda más que un pequeño rincón.

Antes, cuando se inventaba una función nueva, era con una mira práctica; hoy se las inventa expresamente para demostrar los errores y razonamientos de nuestros padres y no se sacará más que esto.

Si la lógica fuera la sola guía del pedagogo, haría falta comenzar por las funciones más generales, es decir, por las más extravagantes.

Es al principiante a quien haría falta poner en contacto con este museo teratológico. Si no lo hacéis, podrían decir los lógicos, no alcanzaréis la seguridad más que por etapas.

6º Sí, puede ser, pero no podríamos vender tan barata la realidad, y no entiendo solamente la realidad del mundo sensible que tiene también su precio, puesto que es para luchar contra ella que los nueve décimos de vuestros alumnos os pedirán armas. Hay una realidad más sutil que sos-

tiene la vida de los seres matemáticos y que es diferente a la lógica.

Nuestro cuerpo está compuesto de células, y las células por átomos; ¿estas células y estos átomos son, por lo tanto, toda la realidad del cuerpo humano?; ¿de la disposición de estas células proviene la unidad del individuo? ¿No es ésta también una realidad y mucho más interesante?

Un naturalista que no hubiera estudiado jamás un elefante más que con el microscopio, ¿creería conocer lo suficiente a este animal?

Sucede lo mismo en Matemáticas. Cuando el lógico haya descompuesto cada demostración en una multitud de operaciones elementales, todas concretas, no poseerá aún toda la realidad entera, pues no sé qué, que hace la unidad de la demostración, le escapará completamente.

En los edificios elevados por nuestros maestros, ¿de qué sirve para admirar la obra del albañil si no podemos comprender el plan del arquitecto? Según esto, esta vista de conjunto, la lógica pura no puede dárnosla, es a la intuición que hace falta pedirla.

Tomemos por ejemplo la idea de la función continua. Esto no es primero más que una imagen sensible, un rasgo trazado con tiza sobre la pizarra. Poco a poco se depura y sirve para construir un sistema complicado de desigualdades, que reproduce todas las líneas de la imagen primitiva; cuando ha sido terminada toda, se ha descimbrado como después de la construcción de una bóveda; esta representación grosera, apoyo desde ahora inútil, ha desaparecido y no ha quedado más que el edificio mismo irreprochable a los ojos del lógico. Por lo tanto, si el profesor no recordara la imagen primitiva, si no restableciera momentáneamente la cimbra, ¿cómo adivinaría el alumno merced a qué capricho todas estas desigualdades han sido levantadas de esta manera las unas sobre las otras? La definición sería lógicamente correcta, pero no le enseñaría la verdadera realidad.

7º Ilenos aquí obligados a retroceder; sin duda es duro para un maestro enseñar lo que no le satisface enteramente, pero la satisfacción del maestro no es el único obje-

to de la enseñanza; debe primero preocuparse de lo que es el espíritu del alumno y de lo que se desea hacer de él. Los zoólogos pretenden que el desarrollo embrionario de un animal resume en un tiempo muy corto toda la historia de sus antepasados desde los tiempos geológicos. Parece que es lo mismo en el desarrollo de los espíritus. El educador debe hacer pasar al niño por donde han pasado sus padres; más rápidamente, pero sin saltarse ninguna etapa. De esta manera, la historia de la Ciencia debe ser nuestra primera guía.

Nuestros padres creían saber lo que es una fracción, o qué es la continuidad, o el volumen de una superficie curva. Somos nosotros los que nos hemos dado cuenta de que no lo sabían. Lo mismo nuestros alumnos creen saberlo cuando comienzan a estudiar seriamente las matemáticas. Si, sin otra preparación, les digo: «No, ustedes no lo saben; esto que creen comprender ustedes, no lo comprenden; es preciso que les demuestre esto que les parece evidente» y si en la demostración me apoyo sobre premisas que les parecen menos evidentes que la conclusión, ¿qué pensarán estos desgraciados? Pensarán que la ciencia matemática no es más que un amontonamiento arbitrario de sutilezas inútiles, o bien les repugnarán o se divertirán como en un juego al que llegasen en un estado de espíritu análogo al de los sofistas griegos.

Más adelante, al contrario, cuando el espíritu del alumno se familiarice con el razonamiento matemático y haya madurado con ese largo contacto, las dudas nacerán de ellos mismos y entonces vuestra demostración será bienvenida. Se despertará de nuevo y las cuestiones se pasarán sucesivamente al niño como se pasaron sucesivamente a nuestros padres, hasta que la seguridad perfecta sólo puede satisfacerle. No basta dudar de todo, hace falta saber el por qué de la duda.

8º El fin principal de la duda matemática es desarrollar ciertas facultades del espíritu, y, entre ellas, la intuición. Es merced a ella que el mundo matemático permanece en contacto con el mundo real; y cuando las matemáticas puras puedan prescindir, sería preciso siempre tener recursos

para salvar el abismo que separa el símbolo de la realidad. El practicante tendrá siempre necesidad, y para un geómetra puro debe haber cien practicantes.

El ingeniero debe recibir una educación matemática completa, pero, ¿para qué debe servirle? Para ver los diversos aspectos de las cosas y verlos pronto; no tiene tiempo para buscar la futilidad.

Es preciso que en los pequeños objetos físicos complejos que se le ofrezcan reconozca en seguida el punto donde podría haber tomado los útiles matemáticos que le hemos puesto en la mano. ¿Cómo lo hará si dejamos entre los unos y los otros ese abismo profundo cavado por los lógicos?

9º Al lado de estos futuros ingenieros, otros alumnos menos numerosos deben, a su turno, llegar a ser maestros; es preciso entonces que vayan hasta el fondo; un conocimiento profundo y riguroso de los primeros principios les es, ante todo, indispensable. Pero esto no es una razón para no cultivar en ellos la intuición; porque se harían una idea falsa de la Ciencia; si no la mirasen jamás más que de un solo lado, y, por otra parte, no podrían desarrollar en sus alumnos una cualidad que no poseyeron ellos mismos.

Para el Geómetra mismo esta facultad es necesaria; es por la lógica que se demuestra, es por la intuición que se inventa. Saber criticar es bueno, saber crear es mejor. Sabéis reconocer si una combinación es correcta, bueno sería si no poseéis el arte de elegir entre todas las combinaciones posibles. La lógica nos enseña que sobre tal y tal camino estamos seguros de no encontrar obstáculos; no nos dice cuál es el que lleva al fin. Por esto es preciso ver la meta de lejos, y la facultad que nos enseña a verla es la intuición. Sin ella, el geómetra sería como un escritor que se hubiera aferrado a la Gramática, pero que no tuviese ideas. Según esto, como esta facultad se desarrolla, si desde que ella se muestra, se la caza o se la proscribe, si se aprende a desafiarla antes de saber qué es lo que se puede sacar de bueno.

Y ahora permitidme abrir un paréntesis para insistir sobre la importancia de los deberes escritos. Las composiciones escritas no ocupan bastante lugar en ciertos exámenes,

en la Escuela Politécnica, por ejemplo. Se me dice que cerrarían la puerta a muy buenos alumnos que saben muy bien sus cursos, que los comprenden muy bien, y que sin embargo son incapaces de dar la menor aplicación.

He dicho antes que la palabra comprender tiene diversos sentidos. No comprenden más que de la primera manera, y acabamos de ver que esto no basta ni para hacer un ingeniero ni para hacer un geómetra. Y bien, puesto que es preciso hacer una elección, prefiero elegir los que comprenden todo.

10º ¿Pero el arte de razonar justo no es también una cualidad preciosa, que el profesor de matemáticas debe antes que todo cultivar? Hay que recordarlo y debe preocuparse desde el principio. Sería desconsolador ver degenerar la Geometría en una Taquimetría de bajo rango, y no suscribo de ninguna manera las doctrinas extremas de ciertos Oberlehrer alemanes. Pero hay bastantes ocasiones de ejercitar los alumnos en el razonamiento correcto, en las partes de las matemáticas donde los inconvenientes que he señalado no se presentan. Hay largos encadenamientos de teoremas donde la lógica absoluta ha reinado desde el principio naturalmente, donde los primeros geómetras nos han dado modelos que tendremos constantemente que imitar y admirar.

Es en la exposición de los primeros principios que hace falta evitar demasiada sutileza; sería más desagradable y por otra parte inútil. No se puede demostrar todo y no se puede definir todo, será siempre necesario pedir prestado a la intuición; qué importa hacerlo un poco más pronto o un poco más tarde, lo mismo pedirle un poco más que un poco menos, con tal que sirviéndonos correctamente de las premisas de que nos ha provisto, aprendamos a razonar bien.

11º ¿Es posible llenar tantas condiciones opuestas? ¿Es posible en particular cuando se trata de dar una definición? ¿Cómo encontrar un enunciado conciso que satisfaga a la vez las reglas intransigentes de la lógica, a nuestro deseo de comprender el puesto de la noción nueva en el conjunto de la Ciencia, a nuestra necesidad de pensar con

imágenes? Lo más a menudo no se le encontrará y es porque no basta enunciar una definición; hace falta prepararla y hace falta justificarla.

¿Qué quiero decir con esto? Ustedes saben lo que he dicho a menudo: toda definición implica un axioma, puesto que afirma la existencia del objeto definido. La definición no será entonces justificada, desde el punto de vista puramente lógico, hasta que se haya demostrado que no entraña contradicción ninguna, ni en los términos ni en las verdades anteriores admitidas.

Pero no basta con esto; la definición nos es presentada como convención; pero la mayoría de los espíritus se rebelarán si ustedes quieren imponerse como una convención arbitraria. No tendrán reposo hasta que ustedes no hayan contestado a numerosas preguntas.

Con frecuencia, las definiciones matemáticas, como lo ha demostrado el señor Liard, son verdaderas construcciones edificadas con todas las piezas con nociones más simples. ¿Pero por qué se han combinado estos elementos así habiendo mil posibilidades más de combinarlos de otra manera? ¿Es por capricho? Si no, ¿por qué esta combinación tenía derecho a la existencia que todas las demás? ¿A qué necesidad responde? ¿De qué manera se ha previsto que desempeñaría en el desarrollo de la Ciencia un papel importante, que abreviaría nuestros razonamientos y nuestros cálculos? ¿Hay en la Naturaleza cualquier objeto familiar, que sea, por así decir, la imagen indecisa y grosera?

Esto no es todo; si respondéis a todas estas preguntas de una manera satisfactoria, veremos que el recién nacido tenía derecho a ser bautizado; pero la elección del nombre no es tampoco arbitraria; es preciso explicar por qué analogías he sido guiado y si le han dado nombres iguales a cosas diferentes, estas cosas, al menos, no difieren sino por la materia y se aproximan por la forma, pues sus propiedades son análogas y, por así decir, paralelas.

Esa a este precio que se podrán satisfacer todas las tendencias. Si el enunciado es bastante correcto como para que le plazca al lógico, la justificación satisfecerá al intuitivo. Pero hay aún algo mejor: todas las veces que esto

sea posible, la justificación precederá el enunciado y lo preparará; entonces será conducida al enunciado general por el estudio de algunos ejemplos particulares.

Otra cosa aún: ninguna de las partes del enunciado de una definición tiene por fin el definir un objeto de otra clase de objetos vecinos. La definición no será comprendida sino cuando hayan enseñado, no el objeto definido, sino los objetos vecinos de los que conviene distinguirlo y de los que ustedes habrán hecho notar la diferencia y que agregaréis explícitamente: es por esto que al enunciar la definición dije esto o esto otro.

Pero ya es hora de examinar las generalidades y los principios un poco abstractos que acabo de exponer, pudiendo ser aplicados en Aritmética, Geometría, Análisis y en Mecánica.

ARITMÉTICA

12º No se puede definir el número entero; en cambio se define comúnmente las operaciones sobre los números enteros. Creo que los alumnos suelen aprenderse estas definiciones de memoria, pero sin atribuirles ningún sentido. Hay en esto dos razones: primero, se las hacen aprender muy rápido, cuando su espíritu no experimenta ninguna necesidad, puesto que estas definiciones no son satisfactorias desde el punto de vista lógico. Para la suma no se podría encontrar una buena, simplemente porque hace falta detenerse y no se sabría definir todo. No es definir la suma decir que ella consiste en agregar. Todo lo que se puede hacer es partir de un cierto número de ejemplos correctos y decir: la operación que acabamos de hacer se llama suma.

Para la sustracción es diferente; se la puede definir lógicamente como la operación inversa de la adición; pero ¿es por ahí que debe comenzarse? Hace falta empezar con ejemplos, la reciprocidad de estas dos operaciones; la definición se preparará y justificará así.

Lo mismo para la multiplicación: se tomará un problema particular; se demostrará que se lo puede resolver sumándole varios números iguales entre ellos; se hará ver en seguida que se llega más pronto al resultado por una multiplicación. La operación que los alumnos sabrán ya hacer por rutina y la definición lógica se deducirá muy naturalmente de ella.

Se definirá la división como la operación inversa de la multiplicación; pero se comenzará por un ejemplo sacado a la noción familiar del reparto y se demostrará por este ejemplo que la multiplicación reproduce el dividendo.

Aun quedan las operaciones sobre las fracciones. No hay dificultades más que para la multiplicación. Lo mejor es exponer primero la teoría de las proporciones, es de ella solo que podrá salir una definición lógica; pero para hacer aceptar las definiciones que se encuentran al principio de esta teoría, es preciso prepararlas con numerosos ejemplos, sacados de los clásicos problemas de la regla de tres, en los que habría que tener cuidado de introducir las nociones fraccionarias. No se temerá más el familiarizar a los alumnos con la noción de proporción por imágenes geométricas, sea haciendo un llamado a sus recuerdos, si ellos han estudiado ya la geometría, sea recurriendo a la intuición directa, si no la han estudiado; lo que los preparará, por otra parte, para estudiarla. Agregaré, en fin, que después de haber definido la multiplicación de fracciones, es preciso justificar esta demostración, demostrando que es conmutativa, asociativa y distributiva y haciendo notar a los auditores cómo se ha hecho esta constatación, para justificar esta definición. Hemos visto qué papel desempeñan en todo esto las imágenes geométricas, y este papel está justificado por la Filosofía y la Ciencia. Si la Aritmética hubiera permanecido pura de toda mezcla con la Geometría, no habría conocido más que el número entero; es por adaptarse a las necesidades de la Geometría que ha inventado otras cosas.

GEOMETRÍA

En geometría encontramos primero la definición de la línea recta. ¿Podemos definir la línea recta? La definición conocida, el camino más corto de un punto a otro, apenas si me satisface. Partiré simplemente de la regla y demostraré primero al alumno cómo se puede verificar una regla invirtiéndola. Esta verificación es la verdadera definición de la línea recta; la línea recta es un eje de rotación. Se les demostrará en seguida cómo verificar la regla por deslizamiento y tendrá una de las propiedades de la línea recta. En cuanto a esta otra propiedad de ser el camino más corto de un punto a otro, es un teorema que puede ser demostrado apodícticamente, pero la demostración es muy delicada para encontrarle sitio en la enseñanza secundaria.

Será mejor constatar que una regla previamente verificada se aplica sobre un hilo tendido. No es preciso temer, en presencia de dificultades análogas, justificarlas con groseras experiencias.

Estos axiomas es preciso admitirlos, y si se admite un poco más de lo estrictamente necesario, el mal no es muy grande, lo esencial es aprender a razonar justo sobre los axiomas una vez admitidos. El tío Sarcey, que amaba repetirse, decía, muy a menudo, que en el teatro el espectador acepta voluntario todos los postulados que se le imponen al principio, pero una vez el telón levantado, se vuelve intransigente sobre la lógica. Pues bien, lo mismo sucede en matemáticas.

Para el círculo, se puede permitir el compás; los alumnos recorrerán al primer golpe de vista la curva trazada; se les hará observar en seguida que la distancia de dos puntos del instrumento permanece constante, que uno de estos puntos es fijo y el otro móvil y así será llevado a la definición lógica.

La definición del plano implica un axioma, y no es preciso disimularlo. Se toma una tabla de dibujo y se les hace notar que una regla móvil se aplica constantemente sobre

esta tabla, conservando tres grados de libertad. Se comparará con el cilindro y el cono, superficies sobre las cuales no se podría aplicar una recta a menos de no hacerlo con dos grados de libertad; después se tomarán tres planchas de dibujo; se mostrará que pueden resbalar permaneciendo aplicadas la una sobre la otra y esto con tres grados de libertad; y en fin, para distinguir el plano de la esfera, que dos de estas tablas, aplicables sobre una tercera, son aplicables una sobre otra.

Puede ser que os sorprendáis de este incesante empleo de instrumentos móviles; esto es un artificio grosero, pero es mucho más filosófico de lo que al principio parece. ¿Qué es eso de la Geometría para la Filosofía? Es el estudio de un grupo. ¿Y de qué grupo? El de los movimientos de los cuerpos sólidos. ¿Cómo definir entonces este grupo sin hacer mover algunos cuerpos sólidos? ¿Debemos conservar la definición clásica de las paralelas y decir que se llaman así dos rectas que situadas en el mismo plano no se encuentran por mucho que se las prolongue? No, puesto que esta definición es negativa, puesto que ella es inverificable por la experiencia y no podría en consecuencia ser mirada como un dato inmediato de la intuición. No, sobre todo, porque es totalmente extraña a la noción de grupo, a la consideración del movimiento de los cuerpos sólidos, que es, como he dicho, la verdadera fuente de la Geometría. ¿No valdría más definir primero la traslación rectilínea de una figura invariable, como un movimiento donde todos los puntos de esa figura tienen trayectorias rectilíneas; demostrar que una traslación parecida es posible haciendo resbalar una escuadra sobre una regla? De esta constatación experimental, erigida en axioma, sería fácil hacer salir la noción de paralelas y el postulado de Euclides mismo.

MECÁNICA

No voy a volver sobre la noción de la velocidad, de la aceleración o de otras nociones cinemáticas; se las relacionará con ventajas a la de la derivada.

Insistiré, por el contrario, sobre las nociones dinámicas de fuerza y de masa.

Hay una cosa que me sorprende, es cuantos jóvenes que han recibido la educación secundaria son alejados de aplicar en el mundo real las leyes mecánicas que les han enseñado. Esto no es solamente porque sean incapaces; ellos ni siquiera piensan en eso. Para ellos el mundo de la Ciencia y el de la realidad están separados por un tabique. No es raro ver a un señor bien puesto, probablemente bachiller, sentado en un coche imaginándose que le ayuda a avanzar empujando sobre la parte delantera y todo esto con menosprecio de la acción y de la reacción.

Si ensayamos analizar el estado de ánimo de nuestros alumnos, esto nos sorprenderá menos. ¿Cuál es para ellos la verdadera definición de la fuerza? No aquella que recitan, sino la que, refugiada en un rincón de su entendimiento, les dirige desde allí todo. Esta definición hela aquí:

Las fuerzas son flechas con las cuales se han hecho paralelogramos. Estas flechas son seres imaginarios que no tienen nada que ver con nada de lo que existe en la Naturaleza. Esto no sucedería si se les hubiera enseñado las fuerzas en la realidad antes de representárseles por flechas.

¿Cómo definir la fuerza? Una definición lógica no sería buena; creo haberlo suficientemente demostrado en otro lugar. Hay la definición antropomórfica, la sensación del esfuerzo muscular; esta es verdaderamente muy grosera y no se puede sacar nada útil.

He aquí la marcha que es necesario seguir: es preciso primero, para hacer conocer el género fuerte, mostrar una después de la otra todas las especies de este género; son numerosas y diversas, hay la presión de los fluidos sobre

las paredes de los vasos donde están encerrados; la tensión de los cables; la elasticidad de un resorte; la gravedad que obra sobre todas las moléculas de un cuerpo; los frotamientos; la acción y reacción mutua normal de dos sólidos en contacto.

Esto no es más que una definición cualitativa; es preciso aprender a medir la fuerza. Para esto se demostrará primero que se puede reemplazar una fuerza por otra sin turbar el equilibrio; encontraremos el primer ejemplo de esta sustitución en la balanza y la doble pesa de Borda. Demostraremos después que se puede reemplazar un peso, no solamente por otro peso, sino por fuerzas de naturaleza diferentes; por ejemplo, el freno de Prony nos permite reemplazar un peso por un frotamiento.

De todo esto sale la noción de la equivalencia de dos fuerzas.

Es preciso definir la dirección de una fuerza. Si una fuerza F es equivalente a otra fuerza F' que es aplicada al cuerpo considerado intermedio de un cable tendido, de tal manera que F pueda ser reemplazada por F' sin que el equilibrio sea turbado, entonces el punto de unión del cable será por definición el punto de aplicación de la fuerza F' y el de la fuerza equivalente F ; la dirección del cable será la dirección de la fuerza F' y ésta de la fuerza equivalente F .

De ahí se pasará a la comprobación de la equivalencia de dos fuerzas. Si una fuerza puede reemplazar a otras dos de la misma dirección, es que es igual a su suma, se demostrará, por ejemplo, que un peso de 20 gramos puede reemplazar a dos de 10 gramos.

¿Es esto suficiente? Todavía no. Sabemos ahora comparar la intensidad de dos fuerzas que tienen la misma dirección y el mismo punto de aplicación; es preciso aprender a hacerlo cuando las direcciones son diferentes. Para esto imaginemos un cable tendido por un peso pasando por una polea; diremos que la tensión de dos hebras de este cable es la misma e igual al peso tensor.

He aquí nuestra definición, nos permite comparar las tensiones de nuestras dos hebras sirviéndose de las defini-

ciones precedentes, de comparar dos fuerzas cualesquiera teniendo la misma dirección que estas dos hebras. Es preciso demostrarlo, justificarlo, que la tensión de la última hebra permanece igual para un mismo cable tensor, cualquiera que sea el número y la disposición de las poleas de devolución. Es necesario demostrar a continuación que esto no es verdadero si las poleas están sin frotamiento.

Una vez dueño de estas definiciones, es preciso hacer ver que el punto de aplicación de la dirección e intensidad bastan para determinar una fuerza; que estas dos fuerzas para las cuales estos tres elementos son equivalentes y pueden ser siempre reemplazados el uno por el otro, sea en el equilibrio, sea en el movimiento, esto cualesquiera que sean las fuerzas puestas en juego. Es necesario hacer ver que dos fuerzas concurrentes pueden ser siempre reemplazadas por una resultante única y que *esta resultante permanece la misma*, ya sea que el cuerpo esté en movimiento o en reposo y cualesquiera que sean las otras fuerzas que les sean aplicadas.

En fin, es preciso enseñar que las fuerzas definidas, como acabamos de hacerlo, satisfacen el principio de la igualdad de la acción y de la reacción.

Todo esto es la experiencia y solamente la experiencia es quien puede enseñárnoslo. Bastará citar algunas vulgares experiencias, que los alumnos hacen todos los días sin darse cuenta y ejecutar delante de ellos un pequeño número de experiencias simples y bien elegidas.

Cuando se haya pasado por todos estos rodeos se podrá representar las fuerzas por flechas y quisiera yo mismo que, en el desarrollo de los razonamientos, volviésemos de cuando en cuando del símbolo a la realidad.

No será difícil por ejemplo ilustrar el paralelogramo de las fuerzas con la ayuda de un pequeño aparato formado por tres cables, pasando sobre dos poleas tendidas por pesos y haciendo equilibrios tirando sobre un mismo punto.

Conociendo las fuerzas es fácil definir la masa, esta vez la definición debe ser sacada a la Dinámica: no hay medio de hacerlo de otra manera, porque el fin a alcanzar es hacer comprender la distinción entre la masa y el peso. Aun aquí

la definición debe ser preparada por medio de experimentos; hay, en efecto, una máquina que parece expresamente hecha para demostrar qué es la masa. Es la máquina de Atwood. Se recordará las leyes de la caída de los cuerpos, que la aceleración de la gravedad es la misma para los cuerpos pesados que para los ligeros y que varía con la latitud, etc.

Ahora, si ustedes me dicen que todos los métodos preconizados por mí son aplicados hace ya mucho tiempo en los Liceos, más bien me regocijaría que me sorprendería: sé que en su conjunto nuestra enseñanza matemática es buena, no deseo que sea trastornada, lo sentiría verdaderamente, no deseo más que mejoramientos lentamente progresivos. No es preciso que esta enseñanza sufra bruscas oscilaciones bajo el soplo caprichoso de modas efímeras. En tempestades parecidas zozobrará su alto valor educativo. Una buena y sólida lógica debe continuar haciendo el fondo. La definición es, por ejemplo, siempre necesaria, pero debe preparar la definición lógica, no debe reemplazarla, debe al menos hacerle desear, en los casos donde la verdadera definición lógica no puede ser dada útilmente más que en la enseñanza superior.

Ustedes han comprendido que esto que he dicho hoy no implica de ninguna manera el abandono de lo que he dicho en otro lugar. A menudo he tenido la ocasión de criticar ciertas definiciones que preconizo hoy. Estas críticas subsisten todas. Estas definiciones no pueden ser más que provisionarias. Pero es preciso pasar por ellas.

CAPÍTULO III

LAS MATEMÁTICAS Y LA LÓGICA

INTRODUCCIÓN

¿Pueden las matemáticas ser reducidas a la lógica sin haber recurrido a los principios que le son propios? Existe una escuela llena de ardor y de fe, que se esfuerza en establecerlo. Tiene un lenguaje especial en el que se substituyen las palabras por signos. Este lenguaje no es comprendido más que por algunos iniciados, de manera que los profanos están dispuestos a inclinarse delante de las decisivas afirmaciones de los adeptos. No creo que será inútil examinar estas afirmaciones de más cerca a fin de ver si justifican el tono perentorio con el cual son presentadas.

Pero para comprender la esencia del problema es necesario entrar en algunos detalles históricos y recordar en particular el carácter de los trabajos de Cantor.

Desde hace mucho la noción del infinito había sido introducida en Matemáticas; pero este infinito era lo que los filósofos denominaban un devenir. El infinito matemático no era más que una cantidad susceptible de crecer más allá de todos los límites, era una cantidad variable de quien no se podía decir que HUBIERA DEJADO ATRÁS todos los límites, sino solamente que los dejaría.

Cantor ha emprendido la tarea de introducir en Matemáticas el INFINITO ACTUAL, es decir, una cantidad que no solamente sea susceptible de dejar atrás todos los límites, sino que sea mirada como si los hubiera pasado.

Se han planteado cuestiones tales como éstas: ¿Hay más

puntos en el espacio que números enteros? ¿Hay más puntos en el espacio que puntos en un plano?, etc.

Y entonces el número de los números enteros, el de los puntos en el espacio, etc., constituye lo que él llama UN NÚMERO CARDINAL TRANSFINITO, es decir, un número cardinal más grande que todos los números cardinales ordinarios. Y se ha entretenido en comparar estos números cardinales transfinitos ordenando en un orden conveniente los elementos de un conjunto que contenía una infinidad, imaginó también lo que llamó los números ordinarios transfinitos sobre los cuales no insistiré.

Numerosos matemáticos se han lanzado sobre sus huellas y se han planteado una serie de problemas del mismo género. Se han familiarizado de tal modo con los números transfinitos que han llegado a hacer depender la teoría de los números finitos de la de los números cardinales de Cantor. Según su manera de ver para enseñar la Aritmética de un modo verdaderamente lógico, se debía comenzar por establecer las propiedades generales de los números cardinales transfinitos, después distinguir entre ellos una pequeña clase, la de los números ordinarios enteros. Merced a esto se podría llegar a demostrar todas las proposiciones relativas a esta pequeña clase (es decir, toda nuestra Aritmética y Álgebra) sin servirse de ningún principio extraño a la lógica.

Este método es evidentemente contrario a toda sabia psicología; por supuesto que no es así como ha procedido el espíritu humano para construir las Matemáticas; también sus autores no sueñan, según creo, en introducirlo en la enseñanza secundaria. ¿Pero es lógico o mejor dicho es correcto? Está permitido dudarlo.

Los geómetras que lo han empleado son, sin embargo, muy numerosos. Han acumulado las fórmulas y han creído libertarse de lo que no era lógica pura escribiendo memorias en que las fórmulas no alternan más con los discursos explicativos como en los libros de Matemáticas ordinarios, pero donde estos discursos han desaparecido completamente.

Desgraciadamente han llegado a resultados contradicto-

rios, es lo que se ha llamado los ANTINOMIOS CANTORIANOS, sobre los cuales tendremos la ocasión de volver. Estas contradicciones no los han descorazonado y se han esforzado en modificar sus reglas para hacer desaparecer las que se habían ya manifestado, sin estar seguros por esto que no se manifestarían de nuevo.

Ya es hora de hacer justicia a estas exageraciones, no espero convencerlos; porque han vivido largo tiempo en esta atmósfera. Por otra parte cuando se ha refutado una de sus demostraciones se está seguro de verla renacer de nuevo con cambios insignificantes y ya varias han vuelto a renacer de sus cenizas, como en otro tiempo la hidra de Lerna con sus famosas cabezas que renacían siempre. Hércules se las cortó, pero su hidra no tenía más que nueve cabezas, a menos que no fueran once, pero aquí hay muchas, hay en Inglaterra, en Alemania, en Italia, en Francia, y es seguro que debería renunciar a la partida. No apelo entonces más que a los hombres de buen sentido y sin partido.

I

En estos últimos años, numerosos trabajos han sido publicados sobre las matemáticas puras y la filosofía de las matemáticas, con miras a desembrollar y aislar los elementos lógicos del razonamiento matemático. Estos trabajos han sido analizados y expuestos muy claramente por el señor Couturat en una obra titulada: LOS PRINCIPIOS DE LAS MATEMÁTICAS.

Para el señor Couturat, los trabajos nuevos y en particular los de los señores Russell y Péano, han cortado definitivamente el debate, desde largo tiempo pendiente entre Leibnitz y Kant. Han mostrado que no hay juicio sintético a priori (como dijo Kant para designar los juicios que no podían ser demostrados ni analíticamente, ni reducidos a identidades, ni establecidos experimentalmente), han demostrado que las Matemáticas son reductibles a la lógica y que la intuición no desempeña ningún papel. Es esto lo que

el señor Couturat expuso en la obra que acabo de citar, y lo que dijo más netamente aun en su discurso en el Jubileo de Kant, si bien oí decir a media voz a mi vecino: «Se ve bien que es el centenario de la muerte de Kant». ¿Podemos subscribir esta definitiva condenación? No lo creo y voy a tratar de demostrar por qué.

II

Lo que nos sorprende primero en la nueva matemática es su carácter puramente formal: «Pensemos, dice Hilbert, tres clases de cosas que llamaremos puntos, rectas y planos, convengamos que una recta está determinada por dos puntos, podremos decir que pasa por esos dos puntos o que estos dos puntos están situados sobre la recta». ¿Qué son estas cosas? No solamente no sabemos nada, sino que tampoco debemos tratar de saberlas. No tenemos necesidad y cualquiera que no hubiera visto jamás ni un punto, ni una recta, ni un plano, podría hacer tanta geometría como hacemos nosotros. La palabra «pasar por» o la palabra «estar situado sobre» no provocan en nosotros ninguna imagen, sin embargo lo primero es sinónimo de estar determinado y lo segundo de determinar.

De esta manera para demostrar un teorema no es necesario ni útil saber lo que quiere decir. Se podría reemplazar el geómetra por el piano para razonar ideado por Stanley Jevons o si se quiere se podría imaginar una máquina donde se introducirían los axiomas por una extremidad, recogiénose los teoremas por el otro extremo, como esa legendaria máquina de Chicago en que los cerdos entran vivos y salen transformados en jamones y salchichas. Con estas máquinas, el matemático no tendría necesidad de saber lo que hace.

No le reprocho a Hilbert este carácter formal de su Geometría. Es hacia ahí adonde debería tender dado el problema que se planteaba. Quería reducir al mínimo el número de los axiomas fundamentales de la Geometría y

hacer la enumeración completa; según esto en los razonamientos en que nuestro espíritu permanece activo, en aquellos en que la intuición desempeña aún un papel, en los razonamientos vivos, por así decir, es difícil introducir un axioma o un postulado que pase desapercibido. No es sino después de haber vuelto a traer los razonamientos geométricos a una forma puramente mecánica que ha podido estar seguro de haber tenido éxito en su designio y haber terminado su obra.

Esto que Hilbert había hecho para la Geometría, otros han querido hacerlo para la Aritmética y para el Análisis. Si hubiesen tenido éxito, ¿estarían los kantianos definitivamente condenados al silencio? Puede ser que no, porque reduciendo el pensamiento matemático a una forma hueca, se lo mutila. Admitamos que hayan establecido que todos los teoremas puedan deducirse por procedimientos analíticos, por simples combinaciones lógicas de un número finito de axiomas y que estos axiomas no sean más que convenciones. El filósofo conservaría el derecho de buscar los orígenes de estas convenciones y de investigar por qué han sido preferidas a las convenciones contrarias.

Y después de todo la corrección lógica de los razonamientos que conducen de los axiomas a los teoremas, no es la sola cosa que debía preocuparnos. ¿En las reglas de la lógica perfecta consisten todas las matemáticas? Sería lo mismo decir que todo el arte del jugador de ajedrez se reduce a la regla de la marcha de las piezas. Entre todas las construcciones que se pueden combinar con los materiales que nos provee la lógica, es necesario hacer una elección; el verdadero geómetra hace esta selección juiciosamente, puesto que va guiado por un instinto seguro, o por cualquier vaga conciencia de no sé qué Geometría más profunda y más oculta, que sola vale tanto como el edificio construido.

Buscar el origen de este instinto, estudiar las leyes de esta Geometría profunda, que se sienten y no se enuncian, sería otra bella tarea para los filósofos que no desean que la lógica sea todo. Pero no es en este punto de vista que me quiero colocar, no es así como quiero presentar la pre-

gunta. Este instinto del que acabamos de hablar es necesario al inventor, pero a primera vista parece que se podría prescindir de él para estudiar la Ciencia una vez creada.

Pues bien, lo que quiero rebuscar es si es verdadero que una vez admitidos los principios de la Lógica se puede, no digo descubrir, sino demostrar todas las verdades matemáticas, sin llamar de nuevo a la intuición.

III

A esta pregunta, respondí en otro tiempo que no (ver Ciencias e Hipótesis, Capítulo 19); ¿debe ser modificada nuestra respuesta por los recientes trabajos? Si había contestado que no, es porque el «principio de inducción completo» me parecía a la vez necesario al matemático e irreductible a la Lógica. Ahora se sabe cuál es el enunciado de este principio.

«Si una propiedad es verdadera del número 1 y si se establece que es verdadera de $n+1$, siempre que ella lo sea de n , será verdadera de todos los números enteros», en ello veía el razonamiento matemático por excelencia. No quisiera decir cómo se ha creído que todos los razonamientos matemáticos pueden reducirse a una aplicación de este principio. Examinando estos razonamientos un poco más atentamente se verán aplicados muchos otros problemas análogos, presentando los mismos caracteres esenciales. En esta categoría de principios, el de la intuición completa es el más simple de todos y es por esto que lo he elegido como ejemplo.

El nombre de principio de inducción completa que ha prevalecido no está justificado. Este modo de razonar no es menos que una verdadera inducción matemática, que no difiere de la inducción común más que por su certidumbre.

IV

DEFINICIONES Y AXIOMAS

La existencia de estos principios representa para los lógicos intransigentes una dificultad, ¿cómo pretenden substraerse a ella? El principio de inducción completa no es, dicen, un axioma propiamente dicho o un juicio sintético a priori; es simplemente la definición de un número entero. Entonces es una simple convención. Para discutir esta manera de ver, es preciso examinar más atentamente las relaciones entre las definiciones y los axiomas.

Volvamos primero sobre un artículo del señor Couturat que se refiere a las definiciones matemáticas, que ha aparecido en la Enseñanza Matemática, revista publicada por Gauthiers-Villars y por Georg, en Génova. Veremos la distinción entre la DEFINICIÓN DIRECTA Y LA DEFINICIÓN POR POSTULADOS.

«La definición por postulados —dice el señor Couturat— se aplica no sólo a una noción, sino a un sistema de nociones; consiste en enumerar las relaciones fundamentales que las unen, y que permiten demostrar todas las otras propiedades; estas relaciones son los postulados...»

Si se han definido previamente todas estas nociones, menos una, entonces esta última será por definición el objeto que verifica estos postulados.

Así ciertos axiomas indemostrables de los matemáticos no serían más que definiciones disfrazadas. Este punto de vista es a menudo legítimo y lo he admitido yo mismo en lo que concierne al postulado de Euclides.

Los otros axiomas de la Geometría no bastan para definir completamente la distancia; la distancia será entonces por definición, entre todos los tamaños que satisfacen a los otros axiomas, aquel que es tal que el postulado de Euclides sea verdadero.

Pues bien, los lógicos admiten para el principio de inducción completa lo que admito para el postulado de Euclides,

no quieren ver en ello más que una definición disfrazada.

Pero para que tengamos este derecho hay dos condiciones que cumplir. Stuart Mill decía que toda definición implica un axioma, por el cual se afirma la existencia del objeto definido. De esta manera no sería el axioma una definición disfrazada, sino por el contrario la definición un axioma disfrazado. Stuart Mill entendía la palabra existencia en un sentido material y empírico; quería decir que definiendo el círculo, se afirma que hay dos cosas redondas en la Naturaleza.

En esta forma su opinión es inadmisibile. Los matemáticos son independientes de la existencia de los objetos materiales; en Matemática la palabra existir no puede tener más que un sentido, significa exento de contradicción.

Rectificado de esta manera, el pensamiento de Stuart Mill llega a ser exacto al definir un objeto, se afirma que la definición no implica contradicción.

Si tenemos entonces un sistema de postulados y si podemos demostrar que estos postulados no implican contradicción, tendremos el derecho de considerarlos como representando la definición de una de las nociones que figuran. Si no podemos demostrar esto, es preciso que lo admitamos sin demostraciones y será entonces un axioma, de manera que si queremos encontrar la definición sobre el postulado volveremos al axioma sobre la definición.

Lo más a menudo para enseñar que una definición no implica contradicción se procede por el ejemplo, se trata de encontrar la manera de formar un ejemplo de un objeto que esté de acuerdo con la definición, una A es todo objeto por el cual una noción A, y decimos que por definición, una A es todo objeto por el cual ciertos postulados son verdaderos, si podemos demostrar directamente que todos estos postulados de un cierto objeto B son verdaderos, la definición estará justificada; el objeto B será un *ejemplo* de uno A. Estaremos seguros que los postulados no son contradictorios, puesto que hay casos en que son verdaderos todos a la vez.

Pero una demostración parecida por el ejemplo no es siempre posible.

Para establecer que los postulados no implican contradicciones es necesario entonces encarar las proposiciones que se puedan deducir de estos postulados considerados como premisas y demostrar que en medio de estas proposiciones no hay dos que sean contrarias la una a la otra. Si estas proposiciones son en cantidades reducidas una verificación directa es posible. Este caso es poco frecuente y por otra parte poco interesante.

Si estas proposiciones son infinitas, no se puede hacer esta verificación directa, es preciso recurrir a procedimientos de demostración donde en general se estará forzado a invocar este principio de inducción completo que se trata precisamente de verificar.

Acabamos de explicar una de las condiciones que debían satisfacer a los lógicos y veremos más adelante que no lo han logrado.

V

Hay una segunda. Cuando damos una definición es para que nos sirva.

Volveremos a encontrar, pues, en la continuación del discurso la palabra definida. ¿Tenemos el derecho de afirmar, del objeto representado por esta palabra, el postulado que ha servido de definición? Sí, evidentemente, si la palabra ha conservado su sentido, si no le atribuimos un sentido diferente. Esto es lo que sucede a menudo y lo más frecuente es no darse cuenta, por lo tanto es necesario ver cómo esta palabra se ha introducido en nuestro discurso y si la puerta por la cual ha entrado no implica en realidad otra definición que la que se ha enunciado.

Esta dificultad se presenta en todas las definiciones de las Matemáticas. La noción matemática ha recibido una definición muy depurada y muy rigurosa; para el matemático puro toda vacilación ha desaparecido; pero si se la quiere aplicar a las ciencias físicas, por ejemplo, ya no tenemos nada que hacer con esta noción pura, sino con un objeto concreto que no es con frecuencia más que una

imagen grosera. Decir que este objeto satisface aunque sólo sea aproximadamente a la definición, es enunciar una verdad nueva, que la experiencia solamente puede afirmar y que no tiene ya el carácter de un postulado convencional.

Pero, sin salir de las Matemáticas puras, se vuelve a encontrar la misma dificultad.

Dais del número una definición sutil; puesto que una vez enunciada esta definición no pensáis más, porque en realidad no es ella la que os ha enseñado lo que era el número, lo sabíais desde hace mucho tiempo y cuando la palabra número se encuentra de nuevo le atribuíis el mismo sentido que cualquiera daría; para saber cuál es este sentido y si es el mismo en tal o cual frase, es preciso ver cómo habéis introducido esta palabra, la de número, en estas dos frases. Por el momento no explicaré más este punto, porque ya hemos de tener la ocasión de volver sobre el mismo.

Así, he aquí una palabra de la que hemos dado explícitamente una definición A; hacemos a continuación en el discurso un uso que supone implícitamente otra definición B. Es posible que estas dos definiciones designen el mismo objeto. Pero que esto sea así es una verdad nueva, que es preciso ya sea demostrar o bien admitir como axioma independiente.

VEREMOS MÁS ADELANTE QUE LOS LÓGICOS NO HAN CUMPLIDO LA SEGUNDA CONDICIÓN MEJOR QUE LA PRIMERA.

VI

Las definiciones del número son muy diversas y numerosas; renuncio incluso a enumerar el nombre de sus autores. No nos debe sorprender que haya tantos. Si una de ellas fuera satisfactoria, no se enunciaría ninguna nueva.

Si cada filósofo que se ha ocupado de esta cuestión ha creído un deber inventar otra, es porque no estaba satis-

fecho de la de sus antecesores, y si no estaba satisfecho es que creía entrever una petición de principio.

He experimentado siempre leyendo los escritos consagrados a este problema un profundo sentimiento de malestar; esperaba siempre chocar con una petición de principio y cuando no lo veía en seguida, tenía el temor de haber mirado mal.

Es que es imposible dar una definición sin enunciar una frase y difícil de enunciar una frase sin poner un nombre de número, o al menos la palabra varios, o al menos un nombre en plural. Entonces la pendiente es resbaladiza y a cada instante se corre el peligro de caer en la petición de principio.

No me referiré a continuación sino a las definiciones en que la petición de principio está más hábilmente disimulada.

VII

LA PASIGRAFÍA

El lenguaje simbólico creado por el señor Péano desempeña un papel muy importante en estas nuevas investigaciones. Es susceptible de rendir algunos servicios, pero me parece que el señor Couturat atribuye una importancia exagerada que ha debido sorprender al señor Péano mismo.

El elemento esencial de este lenguaje son ciertos signos algebraicos que representan las diferentes conjunciones: *sí, y, donde, pues*; que estos signos sean cómodos, es posible; pero que sean destinados a renovar toda la Filosofía, esto es otra cosa. Es difícil admitir que la palabra *Sí* adquiriera cuando se la escribe una virtud que no tenía cuando se la escribía *Si*. Esta invención del señor Péano se llamó primero Pasigrafía, es decir, el arte de escribir un tratado de Matemáticas sin emplear una sola palabra de la lengua usual. Este nombre ha definido muy exactamente su alcance.

Después se le ha elevado a una dignidad más eminente,

confiriéndole el título de Logística. Esta palabra parece que es empleada en la Escuela de Guerra para designar el arte del sargento de caballería, el arte de hacer marchar y acantonar las tropas; pero aquí ninguna confusión es de temer y se ve seguidamente que este nombre nuevo implica el designio de revolucionar la Lógica.

Podemos ver el nuevo método en una memoria matemática del señor Burali-Forti llamada *Una questione sui numeri transfiniti*, inserta en el tomo XI.

DE LOS REDINCONTI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO

Comienzo por decir que esta memoria es muy interesante y si la tomo aquí para ejemplo es precisamente porque es la más importante de todas las que se han escrito en el nuevo lenguaje. Por otra parte los profanos pueden leerla gracias a una traducción interlineal italiana.

Lo que constituye la importancia de esta memoria es que ha dado el primer ejemplo de estos antinomios que se vuelven a encontrar en el estudio de los números transfinitos y que son después de varios años la desesperación de los matemáticos. El objeto de este trabajo, dice el señor Burali-Forti, es demostrar que puede haber dos números transfinitos (ordinales), a y b , tal que a no sea ni igual á b , ni mayor ni menor.

Que el lector se tranquilice para comprender las cuestiones que van a seguir, no tiene necesidad de saber lo que es un número ordinal transfinito.

Ahora bien, Cantor había demostrado precisamente que entre dos números transfinitos, como entre dos números finitos, no puede haber otra relación que la igualdad o la desigualdad en un sentido o en otro. Pero no es de la esencia de esta memoria que quiero hablar aquí; esto me alejaría demasiado del tema; quiero solamente ocuparme de la forma y precisamente me pregunto si esta forma le ha hecho ganar mucho en certeza y si compensa los esfuerzos que impone al escritor y al lector.

Veremos primero al señor Burali-Forti definir el número 1 de la manera siguiente:

$$1 = \iota T' \{ Ko \cap (u, h) \in (v \in U-n-o) \},$$

definición muy propicia para dar una idea del número 1 a las personas que no hayan oído jamás hablar de él.

Entiendo muy mal el Peanniano para osar arriesgar una crítica, pero me temo que esta definición no contenga una petición de principio, puesto que veo 1 en cifra en el primer miembro y uno con todas las letras en el segundo.

Sea lo que fuera, el señor Burali-Forti parte de esta definición y tras un pequeño cálculo llega a la ecuación:

$$(27) 1 \in N o,$$

que nos enseña que uno es un número.

Y puesto que estamos en estas definiciones de los primeros números recordemos que el señor Couturat ha definido igualmente 0 y 1.

¿Qué es cero?, ¿es el número de los elementos de la clase nula? ¿Y qué es la clase nula?, es aquella que no contiene ningún elemento.

Definir cero por nulo y nulo por ninguno, es abusar verdaderamente de la riqueza de la lengua francesa: también el señor Couturat ha introducido un perfeccionamiento en su definición, escribiendo:

$$0 = \iota \Delta : \phi \kappa \Rightarrow \Lambda. \text{ O. } \Lambda = (\kappa \in \phi \kappa),$$

que quiere decir en francés: cero es el número de los objetos que satisface a una condición que no es jamás cumplida.

Pero jamás significa, EN NINGÚN CASO, no veo que el progreso sea considerable.

Me apresuro a agregar que la definición que da el señor Couturat del número 1 es más satisfactoria.

Uno, dice en substancia, es el número de los elementos de una clase cuyos dos elementos cualquiera son idénticos.

Es más satisfactoria, y digo en este sentido que para definir 1, no se sirve jamás del nombre uno, en desquite se sirve del nombre dos. Pero temo que si se pidiera al señor Couturat qué es esto de dos, no se vea obligado a servirse del nombre uno.

VIII

Pero volvamos a la memoria del señor Burali-Forti; he dicho que sus conclusiones están en oposición directa con las de Cantor. Ahora bien, un día recibí la visita del señor Hadamard y la conversación recayó sobre este antinomio. «El razonamiento de Burali-Forti, le dije, ¿no os parece irreproachable?

No, y al contrario, no encuentro nada que objetar al de Cantor. Por otra parte Burali-Forti no tenía el derecho de hablar de todo el conjunto de los números ordinales.

—Perdón, tenía este derecho, puesto que podía siempre presentar:

$$\Omega = T' (N_0, \epsilon >).$$

Quisiera saber qué es lo que puede impedírselo y ¿podemos decir que un objeto no existe cuando se le ha llamado Ω ?»

Fué en vano, no pude convencerlo (lo que por otra parte hubiera sido lamentable, puesto que tenía razón). ¿Se debía solamente a que no hablé el peanniano con bastante elocuencia? Puede ser, pero entre nosotros no lo creo.

Así, a pesar de todo este aparato pasigráfico, la cuestión no está resuelta. ¿Qué es lo que esto prueba? Mientras se trate de demostrar que uno es un número, la Pasigrafía basta, pero si se presenta una dificultad, si hay un antinomio que resolver, la Pasigrafía se torna impotente.

CAPÍTULO IV

LAS NUEVAS LÓGICAS

I

LA LÓGICA DE RUSSELL

Para justificar sus pretensiones la lógica ha tenido que transformarse. Se han visto nacer lógicas nuevas; la más interesante de todas es, sin duda, la del señor Russell.

Parece como si no hubiera nada nuevo que escribir sobre la lógica formal y que Aristóteles hubiera visto el fondo. Pero el campo que el señor Russell atribuye a la lógica es mucho más extenso que el de la Lógica clásica, ha encontrado la manera de decir sobre este asunto cosas originales y algunas veces justas. Primero, mientras que la lógica de Aristóteles era antes que nada la lógica de clases y tomaba por punto de partida la relación del motivo con el predicado, el señor Russell subordina la lógica de clase a la de las proposiciones. El silogismo clásico «Sócrates es un hombre, etc.» es substituído por el silogismo hipotético: Si A es verdad, B es verdad, por otra parte si B es verdad, C es verdad, etc. Y esto a mi modo de ver es una de las más felices ideas, porque el silogismo clásico es fácil de traer el silogismo hipotético, mientras que la transformación inversa no se hace sin dificultad.

Por otra parte no es esto todo: la lógica de las proposiciones del señor Russell es el estudio de las leyes de acuerdo a las cuales se combinan las conjunciones *sí, y, donde*, y la negación *no*. Esto es una extensión de la vieja lógica. Las propiedades del silogismo clásico se extienden sin tra-

bajo al silogismo hipotético, y en las formas de este último se reconocen cómodamente las formas escolásticas; se vuelve a encontrar lo que hay de esencial en la lógica clásica. Pero la teoría del silogismo no es aún más que la síntesis de la conjunción *si* y puede que también de la negación.

Adjuntando otras dos conjunciones, *y donde*, el señor Russell abre a la lógica un nuevo dominio. Los signos, *y*, *donde*, siguen las mismas leyes que los dos signos $\times$ y $+$, es decir, las leyes asociativas, conmutativas y distributivas. Así *y* representa la multiplicación lógica, mientras que *donde* representa la adición lógica. Esto también es muy interesante.

M. B. Russell llega a esta conclusión, que una proposición cualquiera falsa implica todas las otras proposiciones verdaderas o falsas. El señor Couturat dice que esta conclusión primero parecerá paradójal. Basta, sin embargo, haber corregido una mala tesis de matemáticas para reconocer cuán justo ha visto el señor Russell. El candidato se da con frecuencia demasiado trabajo para encontrar la primera ecuación falsa, pero desde que la ha obtenido, no es más que un juego para él ir acumulando los resultados más sorprendentes, entre los cuales algunos pueden ser exactos.

II

Se ve cuánto más rica es la nueva lógica que la lógica clásica; los símbolos se han multiplicado y permiten variadas combinaciones, QUE YA NO SON EN NÚMERO LIMITADO. ¿Tenemos el derecho de dar a esta extensión el sentido del nombre lógica? Sería osado examinar esta cuestión y buscar al señor Russell una simple querella de nombres. Acordémonos de lo que pregunta; pero no nos sorprendamos si ciertas verdades, que se habían declarado irreducibles a la lógica, en el viejo sentido del nombre, se encuentra que han llegado a ser reductibles en la Lógica nueva que es totalmente diferente.

Hemos introducido un gran número de nociones nuevas y no simples combinaciones viejas; el señor Russell no está

por otra parte errado y no solamente al principio del primer capítulo, es decir, de la lógica de las proposiciones, sino al principio del segundo y del tercero, es decir, de la lógica de clases y de relaciones, introduce nuevos nombres que ha declarado indefinibles.

Y no es esto todo, introduce igualmente principio que ha declarado indemostrables. Pero estos principios indemostrables son llamados a la intuición, son juicios sintéticos a priori... Los mirábamos como intuitivos cuando los volvíamos a encontrar, más o menos explícitamente enunciados, en los tratados de Matemáticas, ¿han cambiado de carácter porque el sentido del nombre lógica ha aumentado y que los encontramos ahora en un libro titulado: *Tratado de Lógica*. NO HAN CAMBIADO DE NATURALEZA, SÓLO HAN CAMBIADO DE LUGAR.

III

Estos principios ¿podrían ser considerados como definiciones disfrazadas? Para esto es preciso que haya el medio de demostrar que no implican contradicción. Es preciso establecer que por lejos que se prosiga la serie de deducciones no se estará expuesto a contradecirse.

Se podría tratar de razonar como sigue. Podemos verificar que las operaciones de la nueva lógica aplicadas a premisas exentas de contradicción no pueden dar más que resultados igualmente exentos de contradicción. Si entonces después de N operaciones, no hemos vuelto a encontrar contradicción, es que tampoco volveremos a encontrar después de la $n + 1$ ª. Es por lo tanto imposible que haya un momento en que comience la contradicción, lo que demuestra que no la volveremos a encontrar más. ¿Tenemos el derecho de razonar así? No, porque eso sería hacer inducción completa y el PRINCIPIO DE INDUCCIÓN COMPLETA, RECORDÉMOSLO BIEN, NO LO CONOCEREMOS AÚN.

No tenemos entonces el derecho de mirar estos axiomas

como definiciones disfrazadas, no nos queda más que un recurso, es preciso admitir por cada uno de ellos un nuevo acto de intuición. Por otra parte creo que es el pensamiento de los señores Russell y Couturat.

De esta maenra cada una de las nueve nociones indefinibles y de las veinte probabilidades indemostrables (creo que si las hubiera contado yo, hubiera encontrado alguna más), que forman el fundamento de la nueva lógica, de la lógica en el sentido liberal, suponen un acto nuevo e independiente de nuestra intuición, ¿por qué no decirlo?, un verdadero juicio sintético a priori.

Sobre este punto todo el mundo parece estar de acuerdo; pero lo que el señor Russell pretende y **ES LO QUE ME PARECE DUDOSO, ES QUE DESPUÉS DE ESTOS LLAMADOS A LA INTUICIÓN, NO SE HARÁN MÁS: NO HABRÁ QUE HACER OTROS Y PODRÁN CONSTITUIRSE LAS MATEMATICAS ENTERAS SIN HACER INTERVENIR NINGÚN ELEMENTO NUEVO.**

IV

El señor Couturat repite con harta frecuencia que esta lógica nueva es totalmente independiente de la idea del número. No me entretendré contando cuantos adjetivos numerales, tanto cardinales como ordinales, o adjetivos indefinidos, tales como varios, contiene su exponente. Citemos, no obstante, algunos ejemplos:

«El producto lógico de dos o varias proposiciones es...»

«El producto relativo de dos relaciones es una relación»;

«Una relación tiene lugar entre dos términos, etc., etc....»

Algunas veces este inconveniente se podría evitar, pero a veces es esencial. Una relación es incomprensible sin dos términos; es imposible tener la intuición de la relación, sin tener al mismo tiempo la de sus dos términos y sin hacer notar que son dos, porque para que la relación sea concebible es preciso que sean dos y solamente dos.

V

LA ARITMÉTICA

Llego a lo que el señor Couturat llama la TEORÍA ORDINAL y que es el fundamento de la Aritmética propiamente dicha. El señor Couturat comienza por enunciar los cinco axiomas de Péano, que son independientes como lo han demostrado el señor Péano y Pados.

1º — Cero es un número entero.

2º — Cero no es el siguiente de ningún número entero.

3. — El siguiente de un número entero es un entero, al que convendría agregar todo entero, a un siguiente.

4º — Dos números enteros son iguales si sus siguientes lo son.

El 5º axioma es el principio de inducción completo.

El señor Couturat considera estos axiomas como definiciones disfrazadas, constituyen la definición por postulados, de cero, de siguiente y del número entero. Pero hemos visto que para que una definición por postulados pueda ser aceptada, es preciso establecer que no implica contradicción.

¿Es éste el caso? De ninguna manera.

La demostración no puede hacerse por el ejemplo. No se puede elegir una parte de los números enteros, por ejemplo los tres primeros y demostrar que ellos satisfacen la definición.

Si tomo la serie 0, 1, 2, veo que satisface los axiomas 1, 2, 4 y 5; pero para que ella satisfaga al axioma 3, es preciso que 3 sea un entero y por consiguiente que la serie 0, 1, 2, 3 satisfaga los axiomas 1, 2, 4, 5, pero el axioma 3 exige otro, que 4 sea un entero y que la serie 0, 1, 2, 3, 4 satisfaga los axiomas y así sucesivamente.

Es por lo tanto imposible demostrar los axiomas para algunos números enteros sin demostrarlos para todos, es preciso renunciar a la demostración por el ejemplo.

Es necesario entonces tomar todas las consecuencias de nuestros axiomas y ver si no contienen contradicción. Si estas consecuencias fuesen en número finito, sería fácil; pero son en número infinito; son todas las Matemáticas o al menos toda la Aritmética.

Entonces, ¿qué hacer? En último caso se podría repetir el razonamiento del número tres.

Pero ya lo hemos dicho, ESTE RAZONAMIENTO ES DE INDUCCIÓN COMPLETO y es precisamente el principio de inducción completo que se trataría de justificar.

VI

LA LÓGICA DE HILBERT

Llego ahora al trabajo capital del señor Hilbert, el que ha comunicado al Congreso de los Matemáticos en Heidelberg y del cual una traducción francesa debida al señor Pierre Boutroux ha aparecido en la Enseñanza Matemática, mientras que una traducción inglesa debida al señor Hasted apareció en *The Monist*.

En este trabajo, en el que se encontrarán los pensamientos más profundos, el autor persigue un fin análogo al del señor Russell, pero sobre algunos puntos se aparta de su antecesor.

«Mientras tanto — dice —, si miramos de cerca, constatamos que en los principios lógicos que se acostumbra presentar se encuentran implicadas ya ciertas nociones aritméticas, por ejemplo, la noción de conjunto, y en cierta medida la noción de Número. Así nos encontramos encerrados en un círculo y es porque a fin de evitar toda paradoja me parece necesario desarrollar simultáneamente los principios de la Lógica y los de la Aritmética.»

Ya hemos visto esto que dice el señor Hilbert de los principios de la Lógica, TAL COMO SE HA ACOSTUMBRADO A PRESENTAR se aplica igualmente a la Lógica del señor Russell. Así para el señor Russell la Lógica

es anterior a la Aritmética, para el señor Hilbert son «simultáneas». Entonces veremos más adelante otras diferentes más profundas aun. Pero las señalaremos a medida que se vayan presentando; prefiero seguir paso a paso el desarrollo del pensamiento del señor Hilbert, citando textualmente los pasajes más importantes.

«Tomemos primero en consideración el objeto 1». Hagamos notar que tratándolo así no implicamos de ninguna manera la noción del número, porque está bien entendido que 1 no es aquí más que un símbolo y que no nos preocupamos en absoluto de conocer la situación. «Los grupos formados con este objeto, dos, tres, o varias veces repetidos...» ¡Ah, esta vez no es lo mismo si introducimos los nombres dos, tres, y sobre todo varios, introducimos la noción de número y entonces la definición de número entero finito que encontraremos más adelante llegará tarde.

El autor estaba demasiado en antecedentes para no darse cuenta de esta petición de principio, también al fin de su trabajo busca proceder a una verdadera refacción.

Hilbert introduce a continuación dos objetos simples 1 e $=$, y encara todas las combinaciones de estos dos objetos, todas las combinaciones de sus combinaciones, etc. Está sobreentendido que es preciso olvidar la significación de estos dos signos y no atribuirles ninguna. Divide a continuación estas combinaciones en dos clases, la de seres y la de no seres y hasta este nuevo orden la repartición es completamente arbitraria; toda proposición afirmativa nos enseña que una combinación pertenece a la clase de seres, toda proposición negativa nos enseña que cierta combinación pertenece a la de no seres.

VII

Señalaremos ahora una diferencia que es de la mayor importancia. Para el señor Russell, un objeto cualquiera que él designa por X es un objeto absolutamente determinado, y, sobre el cual no supone nada. Para Hilbert es una de las combinaciones formadas con los símbolos 1 e $=$;

no sabría concebir que se introduzcan otra cosa que las combinaciones de los objetos definidos. Hilbert formula en otra parte un pensamiento en una forma tan clara que creo que debo reproducir en extenso su enunciado. «Las » indeterminadas que figuran en los axiomas (en lugar de » cualquiera o de todas de la lógica ordinaria), represen- » tan exclusivamente el conjunto de los objetos y las combi- » naciones que ya están adquiridas en el estado actual de » la teoría, o que estamos en estado de introducir. Por lo » tanto, cuando se deduzcan las proposiciones de los axio- » mas considerados, son estos objetos y estos axiomas sola- » mente a los que tendremos derecho de substituir a las » indeterminadas.

«No se deberá olvidar que cuando aumentamos el número » de objetos fundamentales, los axiomas adquieren al mis- » mo tiempo una extensión nueva y deben, por consiguiente, » ser de nuevo puestos a prueba y en caso de necesidad » modificados.»

El contraste es completo con la manera de ver del señor Russell. Para este último filósofo, podemos substituir en lugar de X, no solamente los objetos ya conocidos, pero no importa qué. Russell es fiel a su punto de vista que es el de la comprensión. Parte de la idea general de ser y la enriquece cada vez más, limitándola y agregándole cualidades nuevas. Hilbert, por el contrario, no reconoce como seres posibles más que las combinaciones de objetos ya conocidas; de manera que (no mirando más que uno de los lados de su pensamiento) se podría decir que se coloca en el punto de vista de la extensión.

VIII

Prodigamos la exposición de las ideas de Hilbert. Introduce dos axiomas que enuncia en su lenguaje simbólico, pero que significan en el lenguaje de los profanos como nosotros que toda cantidad es igual a ella misma y que toda operación hecha sobre dos cantidades idénticas dan

resultados idénticos. Con este enunciado son evidentes, pero presentarlos así será traicionar el pensamiento del señor Hilbert. Para él las matemáticas se combinan sólo con símbolos y un verdadero matemático debe razonar sobre ellos sin preocuparse de su sentido. También sus axiomas no son para él lo que son para el vulgo.

Los considera como representando la definición por postulados del símbolo $=$ hasta aquí virgen de toda significación. Pero para justificar esta definición es preciso demostrar que estos dos axiomas no conducen a ninguna contradicción.

Por esto el señor Hilbert utiliza el razonamiento N° 111 sin al parecer darse cuenta de que efectúa la inducción completa.

IX

El fin de la memoria del señor Hilbert es totalmente enigmática, y no insistiremos en ella. Las contradicciones se acumulan; se siente que el autor tiene una vaga conciencia de la petición de principio que ha cometido y que busca en vano la manera de rehacer las fisuras de su razonamiento.

¿Qué significa esto? En el momento de demostrar que la definición del número entero por el axioma de inducción completo no implica contradicción, el señor Hilbert se oculta, como se han ocultado los señores Russell y Couturat, porque la dificultad es muy grande.

X

LA GEOMETRÍA

La Geometría, dice el señor Couturat, es un vasto cuerpo de doctrina en el que el principio de inducción completo no interviene. Esto es verdad en cierta medida; no se puede decir que no interviene, sino que interviene poco.

Si nos remitimos a la *Rational Geometry* del Sr. Halsted (New York, John Wiley and Sons, 1904) establecida de acuerdo a los principios del Sr. Hilbert, se ve intervenir el principio de inducción completo por primera vez en la página 114 (a menos que haya buscado mal, lo cual es posible).

Así, la Geometría, que hace algunos años apenas parecía el dominio o el reino en que la intuición era incontestable, hoy es donde los logísticos parecen triunfar. Nada mejor que hacer que medir la importancia de los trabajos del Sr. Hilbert y la profunda huella que han dejado sobre nuestras concepciones.

Pero no hay que equivocarse. *¿Cuál es, en suma, el teorema fundamental de la Geometría? Es que los axiomas de la Geometría no implican contradicción, y esto no puede demostrarse sin el principio de inducción.*

¿Cómo demostró Hilbert este punto esencial? Pues apoyándose sobre el Análisis y por él sobre la Aritmética, y por ella sobre el principio de inducción.

Y si se inventa otra demostración, será preciso aún apoyarse sobre este principio, puesto que las consecuencias posibles de los axiomas, las cuales hay que demostrar que no son contradictorias, son en número infinito.

XI

CONCLUSIÓN

Nuestra conclusión es primero que el *principio de inducción no puede ser considerado como la definición disfrazada del mundo entero.*

He aquí tres verdades:

El principio de inducción completo.

El postulado de Euclides.

La ley física según la cual el fósforo funde a los 44° (citada por el Sr. le Roy).

Se dice: Estas son tres definiciones disfrazadas, la pri-

mera la del número entero, la segunda, la de la línea recta; la tercera, la del fósforo. Lo admito, pero la segunda no lo admito para las otras dos; es preciso que explique la razón de esta aparente inconsecuencia.

Primero vemos que una definición no es aceptable si no se establece que no implica contradicción. Hemos demostrado igualmente que, para la primera definición, esta demostración es imposible; por el contrario, acabamos de recordar que para la segunda, Hilbert había dado una demostración completa.

En lo que concierne a la tercera, es claro que no implica contradicción; pero ¿quiere decir esto que esta definición garantice, como sería necesario, la existencia del objeto definido? No estamos aquí en Ciencias Matemáticas, sino en Ciencias Físicas, y la palabra existencia no tiene el mismo sentido, no significa más ausencia de contradicción, significa existencia objetiva.

Y he aquí ya una primera razón de la distinción que he hecho entre los tres casos; hay una segunda. En las aplicaciones que tenemos que hacer de estas tres nociones, ¿se nos presentan como definidas por estos tres postulados?

Las posibles aplicaciones del principio de inducción son innumerables; tomemos por ejemplo una de las que hemos expuesto antes, y donde se trata de establecer que un conjunto de axiomas no puede conducir a una contradicción. Para esto se considera una de las series de silogismos, pudiendo proseguir partiendo de estos axiomas como premisas.

Cuando se ha acabado el N silogismo, se ve que se puede hacer aún otro, y es el $n + 1$; así el número n sirve para contar una serie de operaciones sucesivas, es un número que puede ser obtenido por adiciones sucesivas.

Es entonces un número después del cual se puede llegar a la unidad por *substracciones sucesivas*. No se podrá evidentemente si se tiene $n \rightarrow n - 1$, porque entonces, por substracción, se encontrará siempre el mismo número. Así de esta manera, hemos sido llevados a considerar que el número n implica una definición del número entero finito, y esta definición es la siguiente: *Un número entero finito*

es el que puede ser obtenido por adiciones sucesivas y es el que es tal que n no es igual a $n - 1$.

Planteadó esto, ¿qué es lo que haremos? Mostramos que si no hay contradicción al n ésimo silogismo no habrá por adelantado al $n + 1$, y deducimos que no la habrá jamás. Ustedes, dicen, tengo el derecho de deducir así, puesto que los números enteros son por definición aquellos para los que un razonamiento parecido es legítimo; pero esto implica otra definición del número entero, que es la siguiente: *Un número entero es aquel sobre el cual se puede razonar por recurrencia*; en la especie es aquel del cual se puede decir que, si la ausencia de contradicción en el momento de un silogismo cuyo número es entero siguiente, no habrá que temer ninguna contradicción por ninguno de los silogismos cuyos números son enteros.

Las dos definiciones no son idénticas, son equivalentes, pero lo son en virtud de un juicio sintético a priori; no se puede pasar de la una a la otra por procedimientos puramente lógicos. Por consiguiente, no tenemos el derecho de adoptar la segunda, después de haber introducido el número entero por un camino que supone la primera.

Al contrario, ¿qué sucede con la línea recta? Lo he explicado ya, y aunque vacile en repetirlo una vez más, me limitaré a resumir muy brevemente mi pensamiento.

No tenemos, como en el caso precedente, dos definiciones equivalentes irreductibles lógicamente la una de la otra. No tenemos más que una expresada por palabras. Diremos que hay otra que sentimos sin poder enunciarla, porque tenemos la intuición de la línea recta, o porque nos representamos la línea recta. Primero no podemos representárnosla en el espacio geométrico, sino solamene en el espacio representativo, y además, que podemos representarnos de esta manera los objetos que poseen las otras propiedades de la línea recta, salvo la de satisfacer el postulado de Euclides. Estos objetos son «las rectas no-euclidianas», que en cierto modo no son entidades faltas de sentido, sino círculos (de verdaderos círculos de verdadero espacio) octogonales a una cierta esfera. Si entre estos objetos igualmente susceptibles de representación, están las primeras

(las rectas euclidianas) que llamamos rectas y no las últimas (las rectas no-euclidianas), esto es por definición.

Y si llegamos, en fin, al tercer ejemplo, a la definición del fósforo, vemos que la verdadera definición será: El fósforo es el trozo de materia que veo en tal frasco.

XII

Y puesto que estoy sobre este asunto, una palabra más. Para el ejemplo del fósforo, dije: «Esta proposición es una verdadera ley física verificable, porque significa: todos los cuerpos que poseen todas las otras propiedades del fósforo, salvo su punto de fusión, fundirán como él a 44°».

Y se me ha respondido: No, esta ley no es verificable, porque si verificáramos que dos cuerpos parecidos al fósforo funden el uno a 44° y el otro a 50°, se podría siempre decir que hay, sin duda, otro punto de fusión, cualquiera otra propiedad desconocida, por la que ellos se diferencian.

No es esto todo lo que quería decir. Hubiera debido escribir: Todos los cuerpos que poseen tales y tales propiedades en número finito (a saber las propiedades del fósforo que están enunciadas en los tratados de Química, exceptuado el punto de fusión), funden a 44°.

Y para poner más en evidencia la diferencia entre los casos de la recta y el fósforo, hagamos aún una advertencia. La recta posee en la Naturaleza varias imágenes más o menos imperfectas, de las cuales los principales son los rayos luminosos y el eje de rotación de un cuerpo sólido. Supongo que se ha constatado que el rayo luminoso no satisface el postulado de Euclides, por ejemplo demostrando que una estrella tiene un paralaje negativo.

¿Qué haremos? Deduciremos que la recta, siendo por definición la trayectoria de la luz, no satisface al postulado, o bien, por el contrario, que la recta satisface por definición al postulado, ¿el rayo luminoso no es rectilíneo? Seguramente estamos en libertad de adoptar una u otra definición y por consiguiente la una o la otra conclusión;

pero adoptar la primera sería estúpido, puesto que el rayo luminoso probablemente no satisface más que de una manera imperfecta, no solamente al postulado de Euclides, sino a las otras propiedades de la línea recta, que si se separa de la recta euclidia, no se aparta menos del eje de rotación de los cuerpos sólidos que es otra imagen imperfecta de la línea recta, que en fin él es sin duda motivo de cambio, de manera que tal línea que era recta ayer, cesará de serlo mañana si cualquier circunstancia física ha cambiado.

Supongamos que se descubre que el fósforo no funde a los 44° , sino a los $43^{\circ} 9'$. ¿Deduciremos que siendo el fósforo por definición lo que funde a los 44° , este cuerpo que llamamos fósforo no es el verdadero?, ¿o que por el contrario el fósforo funde a los $43^{\circ} 9'$? Aquí aun estamos libres de adoptar una u otra definición y por consiguiente una u otra conclusión, pero adoptar la primera sería estúpido, porque no se puede cambiar el nombre de un cuerpo todas las veces que se determina una nueva decimal de su punto de fusión.

XIII

En resumen, los señores Russell e Hilbert han hecho uno y otro un vigoroso esfuerzo; han escrito ambos libros llenos de puntos de vista originales, profundos y a menudo muy justos. Estos dos libros nos harán reflexionar y nos enseñarán mucho. Entre sus resultados, algunos, muchos de entre ellos, son sólidos y destinados a subsistir. Pero de ahí a decir que han zanjado definitivamente el debate entre Kant y Leibnitz es exagerar; sería arruinar la teoría kantiana de las Matemáticas. Yo no sé si realmente han creído haberlo hecho, pero si lo han creído, se han equivocado.

CAPÍTULO V

LOS ÚLTIMOS ESFUERZOS DE LOS LOGÍSTICOS

I

Los logísticos han tratado de contestar a las consideraciones que preceden. Para esto les ha sido preciso transformar la logística, y el señor Russell en particular ha modificado sobre ciertos puntos sus vistas primitivas. Sin entrar en detalle en el debate, quisiera volver sobre las cuestiones más importantes a mi entender; las reglas de la Logística, ¿han hecho sus pruebas de fecundidad e infalibilidad? ¿Es verdad que permiten demostrar el principio de inducción completo sin ningún llamado a la intuición?

II

LA INFALIBILIDAD DE LA LOGÍSTICA

En lo que concierne a la fecundidad, parece que el señor Couturat se hace sencillas ilusiones. La logística, según él, presta a la invención «los zancos y las alas», y en la página siguiente: «*Hace diez años* que el Sr. Péano ha publicado la primera edición de su formulario».

¿Cómo es que hace diez años que tiene alas y aun no ha volado!

Tengo en la más alta estima al Sr. Péano, que ha hecho cosas muy bonitas (por ejemplo su curva que llena toda un área); pero, en fin, no ha ido ni más lejos, ni más alto, ni más de prisa que la mayor parte de los matemáticos ápteros, ¡y hubiera podido hacer todo tan bien con sus piernas!

No veo, por el contrario, en la Logística, más que trabas para el inventor; no nos hace ganar en concisión, lejos de ahí, y si hacen falta 27 ecuaciones para establecer que 1 es un número, ¿cuántas harán falta para demostrar un teorema verdadero? Si distinguimos con el Sr. Whitehead el individuo X , la clase donde el solo miembro es x , y que se llamará x , puesto que la x es la clase cuyo solo miembro es X y que se llamará X , creemos que estas distinciones, por útiles que sean, ¿van a aligerar mucho nuestro modo de andar?

La logística nos obliga a decir todo lo que sobreentendemos, nos obliga a avanzar paso a paso; es, sin duda, más seguro, pero no es más rápido.

No son las alas lo que ustedes nos dan, son andadores. Pero tenemos el derecho de exigir que estos andadores nos impidan caer. Esto será su sola excusa. Cuando un valor no trae un gran interés, hace falta por lo menos que sea una colocación de padre de familia.

¿Debemos seguir ciegamente vuestras reglas? Porque si no sería la intuición sola la que nos permitiría discernir entre ellas, pero entonces es preciso que sean infalibles; no es sino en una autoridad infalible que se puede tener una confianza ciega.

Esto es una necesidad para ustedes. Ustedes serán infalibles o no lo serán. No tienen el derecho de decirnos: «Nos hemos equivocado, es verdad, pero ustedes también se han equivocado». Equivocarnos para nosotros es una desgracia, una gran desgracia; para ustedes es la muerte.

No digáis nada más: ¿es que la infalibilidad de la Aritmética impide los errores de la suma? Las reglas del cálculo son infalibles y, sin embargo, se ve equivocarse a los *que no aplican estas reglas*; pero al revisar los cálculos se notará en seguida en qué momento se han apartado de ellas. Aquí no es esto; los logísticos han aplicado sus reglas y han caído en la contradicción y esto, si es verdad, que se aprestan a cambiar sus reglas y a «sacrificar la noción de clase». ¿Por qué cambiarlas si son infalibles?

No estamos obligados, dicen ustedes, a resolver *ahora o nunca* todos los problemas posibles. ¡Oh! no os hemos

pedido tanto; sí, si frente a un problema ustedes no diesen ninguna solución, no tendríamos nada que decir; pero por el contrario, ustedes nos han dado *dos*, que son contradictorias; por consiguiente, una al menos es falsa y esto es una falla.

M. Russell trata de conciliar estas contradicciones, lo que no puede hacerse según él, «sino reduciendo o sacrificando la noción de clase». Y el señor Couturat, descontando el éxito de esta tentativa, agrega: «Si los logísticos tienen éxito allí donde los otros han fracasado, el Sr. Poincaré querrá bien recordar esta frase y hacer el honor de la solución a la Logística».

Pero no; La Logística existe, tiene su código que tiene ya cuatro ediciones, o más bien es este código la Logística misma. ¿El señor Russell se apresta a demostrar que uno al menos de dos razonamientos contradictorios ha transgredido el código? De ninguna manera, se apresta a cambiar estas leyes y a abrogar un cierto número. Si tiene éxito, haré honor a la intuición del señor Russell y no a la Logística peanniana que habrá destruido.

III

LA LIBERTAD DE LA CONTRADICCIÓN

Había opuesto dos objeciones a la definición del número entero adoptada por los logísticos. ¿Qué responde el Sr. Couturat a la primera de estas dos objeciones?

¿Qué significa en matemáticas la palabra existir? Significa, dije, estar exento de contradicción. A esto el señor Couturat contesta: «La existencia lógica, dice, no es la ausencia de contradicción. Consiste en el hecho de que una clase no es hueca; decir: «Existen las A, es por definición afirmar que la clase A no es nula». Y sin duda afirmar que la clase A no es nula, es por definición afirmar que existen las A».

Pero las dos afirmaciones están desprovistas de sentido, a menos que no signifiquen las dos que se pueden

ver o tocar las A, este sentido dado por los físicos y los naturalistas, o bien que se puede concebir una A, sin ser arrastrado a contradicciones, este es el sentido que les dan los lógicos y los matemáticos.

Para el Sr. Couturat no es la no-contradicción lo que prueba la existencia, es la existencia lo que prueba la no-contradicción. Para establecer la existencia de una clase, es necesario entonces establecer, por medio de un ejemplo, que hay un individuo perteneciente a esta clase: «Pero diremos, ¿cómo demostraremos la existencia de este individuo? No es preciso que esta existencia sea establecida para que se pueda deducir la existencia de la clase, de la cual forma parte. Y bien, no por paradójal que parezca esta aserción no se demuestra jamás la existencia de un individuo. Los individuos solamente porque lo son, son siempre considerados como existentes. No se puede jamás expresar que un individuo exista, absolutamente hablando, sino que él existe en una clase». El Sr. Couturat encuentra su propia aserción paradójal y no será por cierto él solo. Debe por lo tanto tener un sentido; quiere decir, sin duda, que la existencia de un individuo, solo en el mundo, y del cual no se afirma nada, no puede acarrear contradicción, por lo tanto, que él será único; es evidente que no podrá molestar a nadie. Pues bien, sea; admitamos la existencia del individuo «absolutamente hablando», nos queda por demostrar la existencia del individuo «en una clase», y para esto necesitamos siempre probar que la afirmación: tal individuo pertenece a tal clase, no es contradictoria ni en ella misma, ni con los otros postulados adoptados.

«Esto, entonces, es admitir una exigencia arbitraria, continúa el Sr. Couturat, y abusiva, que pretende que una definición no es válida si no se prueba primero que no es contradictoria. No se podría reivindicar en términos más enérgicos y orgullosos la libertad de la contradicción». En todo caso *l'onus probandi* incumbe a los que creen que estos principios son contradictorios. Los postulados son presumidos compatibles hasta probar lo contrario, lo mismo que un acusado es presumido inocente.

Inútil añadir que no subscribo esta reivindicación. Pero dicen ustedes: la demostración que usted exige de nosotros es imposible, y usted no puede intimarnos a «tomar la Luna con los dientes». Perdón, esto es imposible para ustedes, pero no para nosotros, que admitimos el principio de inducción como un «juicio sintético a priori». Y esto será tan necesario para ustedes como para nosotros.

Para demostrar que un sistema de postulados no implica contradicción, es necesario aplicar el principio de inducción completo; no solamente esta manera de razonar no tiene nada de «caprichosa», sino que es la correcta. No es verosímil que se le haya jamás empleado: y no es difícil encontrar «ejemplos y precedentes». He citado dos en mi artículo que están sacados del folleto del Sr. Hilbert. No he sido el único que ha hecho uso y quien no lo ha hecho hizo mal. Lo que reprocho al Sr. Hilbert no es el haber recurrido (un matemático de raza como él no podía no ver que necesitaba una demostración y que era la única posible), sino el haber recurrido sin reconocer el razonamiento por recurrencia.

IV

LA SEGUNDA OBJECCIÓN

Señalé un segundo error de los logísticos en el artículo del Sr. Hilbert. Hoy el Sr. Hilbert está excomulgado, y el Sr. Couturat no lo mira más como logístico; me va a preguntar si he encontrado la misma falta en los logísticos ortodoxos. No, no la he visto en las páginas que he leído; no sé si la encontraré en las trescientas páginas que están escritas y que no tengo ganas de leer.

Necesario es que las cometan el día que quieran sacar de la Ciencia Matemática una aplicación cualquiera. Esta ciencia no tiene por objeto únicamente contemplar eternamente su ombligo; toca a la Naturaleza y un día u otro tomará contacto con ella; este día necesitará sacudir las definiciones verbales y no valerse más de palabras.

Volvamos al ejemplo del Sr. Hilbert. Se trata siempre del razonamiento por recurrencia y de la cuestión de saber si un sistema de postulados no es contradictorio. El señor Couturat me dirá sin ninguna duda que entonces esto no toca a él, pero puede ser que les interese a los que nos reivindicamos como él la libertad de contradicción. Queremos establecer como antes que no encontramos contradicción después de un número cualquiera de razonamientos, tan grande como se quiera, siempre que este número sea finito. Para esto es preciso aplicar el principio de inducción. ¿Debemos entender aquí por número finito todo número al cual, por definición, se aplique el principio de inducción? Evidentemente que no, pues de lo contrario nos veríamos conducidos a las más molestas consecuencias.

Para que tengamos el derecho de plantear un sistema de postulados, es necesario que estemos seguros de que no son contradictorios. Esta es una verdad admitida por la mayor parte de los sabios. Habría escrito para todos antes de haber leído el último artículo del Sr. Couturat. Pero, ¿qué significa? Querrá decir: es preciso que estemos seguros de no volver a encontrar contradicción después de un número finito de proposiciones; el número finito siendo por definición aquel que goza de todas las propiedades de naturaleza recurrente; de tal manera que si una de estas propiedades faltara, si, por ejemplo, caemos sobre una contradicción, ¿convendríamos en decir que el número en cuestión no es finito?

En otros términos queremos decir: es preciso que estemos seguros de no volver a encontrar contradicción, con la condición de convenir en detenernos justo en el momento en que estaríamos al punto de encontrar una.

Basta enunciar una proposición parecida para condenarla.

Así, no solamente el razonamiento del Sr. Hilbert supone el principio de inducción, sino que supone que este principio nos es dado no como una simple definición sino como un juicio sintético a priori.

En resumen:

Una demostración es necesaria.

La sola demostración posible es la demostración por recurrencia.

No es legítima si no se admite el principio de inducción y si se la mira no como una definición sino como un juicio sintético.

V

Voy ahora a abordar el examen del nuevo trabajo del Sr. Russell. Este trabajo ha sido escrito para vencer las dificultades levantadas por estos *Antinomios cantorianos* a los que ya hemos aludido con harta frecuencia. Cantor creyó poder constituir una Ciencia del Infinito; otros se le adelantaron en el camino que había abierto, pero chocaron pronto con extrañas contradicciones. Estos antinomios son ya numerosos, pero los más célebres son:

- 1º El antinomio Burali-Forti;
- 2º El antinomio Zermelo-König;
- 3º El antinomio Richard.

Cantor demostró que los números ordinales (se trata de números ordinales transfinitos, noción nueva introducida por él) pueden ser ordenados en una serie lineal, es decir, que de dos números ordinales desiguales, hay siempre uno que es más pequeño que el otro. Burali-Forti demuestra lo contrario, y, en efecto, dice en breves palabras que si se pueden colocar todos los números ordinales en una serie lineal, esta serie definirá un número ordinal que será más grande que todos los otros, se podrá a continuación añadir 1 y se obtendrá todavía un número ordinal que será *aún* más grande, y esto es contradictorio.

Volveremos más adelante sobre el antinomio Zermelo-König, que es de naturaleza diferente. He aquí el antinomio Richard (Revista General de Ciencias, 30 de junio de 1905). Consideremos todos los números decimales que se puedan definir con la ayuda de un número finito de palabras; estos números decimales forman un conjunto E y es fácil ver que este conjunto es numerable, es decir,

que se pueden numerar los diversos números decimales de este conjunto desde el 1 hasta el infinito. Supongamos la numeración efectuada y definamos un número N de la manera siguiente: Si la n decimal de n número del conjunto E es

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

la n decimal de N será:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1, 1,

Como se ve, N no es igual al N número de E , y como n es cualquiera, N no pertenece a E y por lo tanto N deberá pertenecer a este conjunto, puesto que lo hemos definido con un número finito de palabras.

Veremos más lejos que el Sr. Richard ha dado con mucha sagacidad en la explicación de su paradoja y que su explicación puede extenderse, *mutati mutandis*, a las otras paradojas análogas. El Sr. Russell cita aún otro antinomio bastante divertido.

¿Cuál es el más pequeño número entero que no se puede definir por una frase formada de menos de cien palabras francesas?

Este número existe; y en efecto, los números susceptibles de ser definidos por una frase parecida son en número finito, puesto que las palabras de la lengua francesa no son en número finito. Entonces entre ellos habrá uno que será más pequeño que todos los otros.

Por otra parte, este número no existe, puesto que su definición implica contradicción. Este número, en efecto, se encuentra definido por la frase en *itálica* que está formada por menos de cien palabras francesas; y por definición este número no puede ser definido por una frase parecida.

VI

ZIGZAG-THEORY Y NOICLAS-THEORY

¿Cuál es la actitud del Sr. Russell en presencia de estas contradicciones? Después de haber analizado las que acabamos de referirnos y de haber evitado otras aún, después de haberlas dado una forma que hace pensar en el Epiménida, no vacila en concluir:

«A propositional function of one variable does not always determine a class». Una función proposicional (es decir una definición) no determina siempre una clase. Una propositional function o «norm» puede ser «no predicativa». Y esto no quiere decir que estas proposiciones no predicativas determinen una clase hueca, una clase nula; esto no quiere decir que no haya ningún valor de X que satisfaga a la definición y que pueda ser uno de los elementos de la clase. Los elementos existen, pero no tienen derecho de sindicarse para formar una clase.

Pero esto no es más que el comienzo, y es preciso saber reconocer si una definición es o no predicativa; para resolver este problema, el Sr. Russell vacila entre tres teorías que él llama:

- A. The zigzag theory.
- B. The theory of limitation of size;
- C. The no classes theory.

De acuerdo con la zigzag teoría: «las definiciones, funciones proposicionales determinan una clase cuando son muy simples y no cesan de hacerlo sino cuando son muy complicadas y oscuras». ¿Quién decidirá ahora si una definición puede ser mirada como suficientemente simple para ser aceptable?

A esta pregunta no hay respuesta, sino la leal confesión de una completa impotencia: «las reglas que permitirían reconocer si estas definiciones son predicativas, serían extremadamente complicadas y no podrían recomendarse por

ninguna razón plausible. Es un defecto que se podría remediar con más ingeniosidad o sirviéndose de distinciones no señaladas aún. Pero hasta aquí, buscando estas reglas, no he podido encontrar otro principio director que la ausencia de contradicción.

Esta teoría permanece entonces oscura, en esta noche, un solo resplandor; es la palabra zigzag. Esto que el Sr. Russell llama la *zigzag-giness* es sin duda el carácter particular que distingue el argumento de Epiménides.

De acuerdo a la teoría *of limitation of size*, una clase cesará de tener derecho a la existencia si está muy extendida. Puede ser que pudiera ser infinita, pero no sería necesario que lo fuera mucho.

Pero encontramos siempre la misma dificultad, ¿en qué momento llegará a serlo con exceso? Claro es que esta dificultad no está resuelta, y el Sr. Russell pasa a la tercera teoría.

En la *no classes theory* le es prohibido pronunciar la palabra clase, y se debe reemplazar esta palabra por perífrases variadas. Qué cambio para los logísticos que no hablan más que de clases y de clases de clases. Va a ser necesario rehacer toda la logística. ¿Se figurarán cuál va a ser el aspecto de una página de Logística cuando se hayan suprimido todas las proposiciones en que figure el problema de clase? No quedarán más que algunos sobrevivientes esparcidos en medio de una página blanca. *Apparent rari nantes in gurgite vasto*.

Sea lo que sea, se ve cuáles son las vacilaciones del Sr. Russell, las modificaciones que va a hacer sufrir a los principios fundamentales que ha adoptado hasta aquí. Van a ser necesarios criterios para decidir si una definición es muy complicada o muy extensa, y estos criterios no podrán ser justificados más que por un llamado a la intuición.

Es sobre la *no classes theory* que el Sr. Russell se inclina finalmente.

Sea lo que sea, la logística hay que rehacerla y no se sabe bien lo que se podrá salvar. Inútil agregar que el Cantorismo y la Logística están solos en causa: las verdaderas Matemáticas, aquellas que sirven para cualquier cosa, po-

drán continuar desarrollándose de acuerdo a sus principios propios, sin preocuparse de las tormentas que reinan fuera de ellas y continuarán paso a paso sus conquistas acostumbradas que son definitivas y que no han abandonado jamás.

VII

LA VERDADERA SOLUCIÓN

¿Qué elección debemos hacer de estas diferentes teorías? Me parece que la solución está contenida en una carta del Sr. Richard del que hablé antes y que se encontrará en la Revista General de Ciencias del 30 de junio de 1905. Después de haber expuesto el antinomio que hemos llamado el antinomio Richard, da la explicación.

Volvamos a lo que hemos dicho de este antinomio en el párrafo V: E es el conjunto de todos los números que se pueden definir por un número finito de palabras, *sin introducir la noción del conjunto*. Sin ello, la definición de E contendría un círculo vicioso; no se puede definir E por el conjunto E mismo.

Según esto, hemos definido N en un número finito de palabras; es verdad, pero apoyándonos sobre la noción de conjunto E. Y he aquí por qué N no forma parte de E.

En el ejemplo elegido por el Sr. Richard, la conclusión se presenta con una evidencia entera, y la evidencia parecerá aún más grande cuando se lea el texto de su carta. Pero la misma explicación vale para los otros antinomios, así que es fácil verificarlo.

Así las definiciones que deben ser consideradas como no predicativas son las que contienen un círculo vicioso. Y los ejemplos que preceden muestran suficientemente bien lo que entiendo por esto.

¿Es esto lo que el Sr. Russell llama la *zigzag-giness*? Planteo la cuestión sin resolverla.

VIII

LAS DEMOSTRACIONES DEL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN

Examinemos ahora las pretendidas demostraciones del principio de inducción y en particular las del Sr. Whitehead y del Sr. Burali-Forti.

Hablemos primero de la de Whitehead y aprovechemos algunas demostraciones nuevas felizmente introducidas por el Sr. Russell en su reciente trabajo.

Llamemos *clase recurrente* a toda clase de número que contenga cero y que contenga $N + 1$ si ella contiene n .

Llamemos *número inductivo* a todo número que forme parte de *todas* las clases recurrentes.

¿Con qué condición esta última definición que desempeña un papel esencial en la definición de Whitehead será «predicativa» y, por consiguiente, aceptable?

Es preciso entender de acuerdo a lo que antecede. Por *todas* las clases recurrentes, todas a las que en la definición no entra la noción de número inductivo.

Sin esto se caerá en el círculo vicioso que ha engendrado los antinomios.

Según esto, Whitehead no ha tomado esta precaución.

El razonamiento de Whitehead es, por lo tanto, vicioso; es el mismo que ha conducido a los antinomios; era ilegítimo cuando daba resultados falsos; permanece ilegítimo cuando conduce por azar a un resultado verdadero.

Una definición que contiene un círculo vicioso no define nada. No sirve para decir nada, estamos seguros, cualquiera que sea el sentido que le demos a nuestra definición, que tenga al menos cero que pertenezca a la clase de números inductivos; no se trata de saber si esta clase es hueca, sino si se la puede rigurosamente delimitar. Una «clase no predicativa» no es una clase hueca, es una clase en la cual la frontera está indecisa.

Inútil agregar que esta objeción particular deja subsistir las objeciones generales que se aplican a todas las demostraciones.

IX

El Sr. Burali-Forti ha dado otra demostración en su artículo «La Clase Finita» (Atti di Torino, T XXXII). Pero está obligado a admitir dos postulados.

El primero es que existe por lo menos siempre una clase infinita.

El segundo se enuncia así:

$$u \in \kappa (K - \iota \Lambda). \supset . u < \nu u$$

El primer postulado no es más evidente que el principio a demostrar; el segundo no solamente no es evidente, sino que es falso; como lo ha demostrado el Sr. Whitehead, como por otra parte el más ciego se hubiera dado cuenta en seguida, si el axioma hubiera sido enunciado en un lenguaje inteligible, puesto que significa: el número de combinaciones que se pueden formar con varios objetos es más pequeño que el número de estos objetos.

X

EL AXIOMA DE ZERMELO

En una demostración célebre el Sr. Zermelo se apoyó sobre el axioma siguiente:

En un conjunto cualquiera (o incluso en alguno de los conjuntos de un conjunto de conjuntos), podemos siempre elegir al azar un elemento (cuando este mismo conjunto de conjuntos comprende una infinidad de conjuntos). Se ha aplicado mil veces este axioma sin enunciarlo, pero desde que fué enunciado despertó dudas. Algunos matemáticos como el Sr. Russell lo rechazaron resueltamente, otros lo admiran. Veamos qué piensa el Sr. Russell después de su último artículo.

No se pronuncia, pero las consideraciones a las que se lanza son muy sugestivas.

Primero un ejemplo muy pintoresco, supongamos que te-

nemos tantos pares de botas como números enteros, de tal manera que podamos numerar los pares desde 1 hasta el infinito. ¿Cuántas botas tendremos? El número de botas será igual al número de pares. Sí, si en cada par la bota derecha se distingue de la bota izquierda, bastará en efecto dar el número $2n-1$ a la bota derecha de la n par y el número $2n$ a la bota izquierda de la n par.

No, si la bota derecha es parecida a la bota izquierda, porque una operación parecida llegará a ser imposible. A menos que no se admita el axioma de Zermelo, porque entonces se podría elegir al azar en cada par la bota que se miraría como derecha.

XI

CONCLUSIONES

Una demostración en verdad fundada sobre los principios de la Lógica Analítica se compondrá de una serie de proposiciones; las unas, que servirán de premisa, serán las identidades o las definiciones, otras se deducirán de las primeras de cerca en cerca, pero por mucho que el lazo entre la proposición y la siguiente se vea inmediatamente, no se verá en seguida cómo ha podido pasar de la primera a la última, que se podrá estar tentado de mirar como una verdad nueva. Pero si se reemplazan sucesivamente las diversas expresiones que figuran por su definición y si se prosigue esta operación lo más que sea posible, no quedarán al fin más que las identidades, de manera que todo se reducirá a una inmensa tautología. La Lógica permanece entonces estéril a menos que sea fecundada por la intuición.

He aquí lo que he escrito otras veces; los logistas profesan lo contrario y creen haberlo probado demostrando efectivamente verdades nuevas.

¿Mediante qué mecanismo?

Porque al aplicar a sus razonamientos el mecanismo que acabo de describir, es decir, reemplazando los términos de-

finidos por sus definiciones, ¿no lo vemos fundirse en identidades como los razonamientos comunes? ¿Es posible que este procedimiento no le sea aplicable? ¿Por qué? Porque sus definiciones son no predicativas, y presentan esa especie de círculo vicioso oculto que he señalado antes; las definiciones no predicativas no pueden ser substituídas por el término definido. En estas condiciones *la lógica no es más estéril, engendra el antinomio.*

Es la esencia en la existencia del infinito actual lo que ha dado nacimiento a estas definiciones no predicativas. Me explico: en estas definiciones figura la palabra *todos*, así como se la ve en los ejemplos citados antes. La palabra *todos* tiene un sentido bien neto cuando se trata de un número infinito de objetos; para que tenga aun uno cuando los objetos sean en número infinito, es preciso que haya un infinito actual. De otra manera *todos* estos objetos no podrán ser concebidos como planteados anteriormente a su definición, y entonces, si la definición de una noción N depende de *todos* los objetos A, puede ser tachada de círculo vicioso, si entre los objetos A hay alguno que no se puede definir sin hacer intervenir la noción N misma.

Las reglas de la Lógica formal expresan simplemente las propiedades de todas las clasificaciones posibles. Pero para que sean aplicables, es preciso que estas clasificaciones sean inmutables y que no se puedan modificar en el curso del razonamiento. Si no se ha clasificado más que un número finito de objetos, es fácil conservar sus clasificaciones sin cambio. Si los objetos son en número *indefinido*, es decir, si se está sin cesar expuesto a ver surgir objetos nuevos e imprevistos, puede suceder que la aparición de un objeto obligue a modificar la clasificación; es de esta manera como se está expuesto a los antinomios.

No hay infinito actual; los Cantorianos lo han olvidado y han caído en la contradicción. Es verdad que el Cantorismo ha rendido servicios, pero era cuando se le aplicaba a un verdadero problema, donde los términos estaban netamente definidos y entonces se podía marchar sin temor.

Los Logísticos lo han olvidado como los Cantorianos, y han vuelto a encontrar las mismas dificultades. Pero se

trata de saber si se han encarrilado en esta vía por accidente o si era para ellos una necesidad.

Para mí la cuestión no es dudosa, la creencia en el infinito actual es esencial en la logística Russelliana. Es esto justamente lo que la distingue de la lógica Hilbertiana. Hilbert se coloca en un punto de vista de la extensión, precisamente a fin de evitar los antinomios cantorianos; Russell se coloca en el punto de vista de la comprensión, por consiguiente, el género es para el anterior a la especie y el *summus genus* anterior a todo.

Esto no sería inconveniente si el *summus genus* fuera finito; pero si es infinito, es preciso plantear el infinito antes de lo finito, es decir, mirar al infinito como actual.

Y no tenemos solamente las clases infinitas; cuando pasamos del género a la especie, restringiendo el concepto por condiciones nuevas, estas condiciones son aún en número infinito. Porque expresan generalmente que el objeto encarado presenta tal o cual relación con todos los objetos de una clase infinita.

Pero esto ya es viejo. El Sr. Russell se ha dado cuenta del peligro y va a avisar. Va a cambiar todo; y que se entienda bien: no se apresta solamente a introducir nuevos principios que permitirán operaciones antes prohibidas; se apresta a prohibir operaciones que juzgaba antes legítimas. No se contenta con adorar lo que ha quemado; y lo que es más grave aún, va a quemar lo que ha adorado. No agrega un ala nueva al edificio, zapa las fundaciones.

La vieja Logística ha muerto, por más que la zigzag-theory y la no-class theory se disputen ya su sucesión. Para juzgar a la nueva, esperaremos que exista.

LIBRO TERCERO

LA NUEVA MECÁNICA

CAPÍTULO I

LA MECÁNICA Y EL RADIO

I

INTRODUCCIÓN

Los principios generales de la Dinámica, que han servido desde los tiempos de Newton de fundamento a la Ciencia Física y que parecerían inmóviles, ¿están a punto de ser abandonados o por lo menos a punto de ser profundamente modificados?

Esto es lo que muchas personas se preguntan después de varios años; según la opinión de esas personas el descubrimiento del radio habría derribado los dogmas científicos que parecían más sólidos, por una parte, la imposibilidad de la transmutación de los metales, por otra los postulados fundamentales de la mecánica. Puede que sea demasiado prematuro considerar estas novedades como definitivamente establecidas y romper nuestros ídolos de ayer; puede ser que conviniera, antes de tomar partido, esperar experiencias más numerosas y más definitivas. No es menos necesario conocer lo antes posible las doctrinas nuevas y los argumentos, ya muy serios, sobre los cuales se apoyan.

Recordemos primero en algunas palabras en qué consisten estos principios.

A. — El movimiento de un punto material aislado y substraído a toda fuerza exterior es rectilíneo y uniforme; es el principio de inercia; sin fuerza no hay aceleración.

B. — La aceleración de un punto móvil tiene la misma dirección que la resultante de todas las fuerzas a las que este punto está sometido, es igual al cociente de esta resultante por un coeficiente llamado *masa* de un punto móvil.

La masa de un punto móvil, así definida, es una constante, no depende de la velocidad adquirida por este punto; es la misma, si la fuerza, siendo paralela a esta velocidad, tiende sólo a acelerar o a retardar el movimiento del punto, o si, por el contrario, siendo perpendicular a esta velocidad, tiende a hacer desviar este movimiento sobre la derecha, o la izquierda, es decir, a curvar la trayectoria.

C. — Todas las fuerzas que actúan sobre un punto material provienen de la acción de otros puntos materiales; no dependen más que de las posiciones y velocidades *relativas* de estos diferentes puntos materiales.

Combinando los dos principios B y C se llega al *principio del movimiento relativo*, en virtud del cual las leyes del movimiento de un sistema son las mismas, ya sea que se refiera este sistema a ejes fijos, o a ejes móviles animados de un movimiento de traslación rectilíneo y uniforme, de tal modo que sea imposible distinguir el movimiento absoluto de un movimiento relativo por referencia a ejes móviles parecidos.

D. — Si un punto material A y estas dos acciones son dos fuerzas iguales y directamente opuestas. *Es el principio de la igualdad de la acción y de la reacción*, o más brevemente el *principio de reacción*.

Las observaciones astronómicas, los fenómenos físicos más comunes, parecen haber proporcionado a estos principios una confirmación completa. Es verdad, decimos ahora, pero es porque no se ha experimentado sino con velocidad muy pequeña; Mercurio, por ejemplo, el planeta más rápido, apenas si recorre unos cien kilómetros por segundo. ¿Se comportaría de la misma manera este astro si fuera mil veces más veloz? Se ve que no hay un motivo

para inquietarse; cualesquiera que puedan ser los progresos del automovilismo, transcurrirá aún mucho tiempo antes que se deba renunciar a aplicar a nuestra máquina los principios clásicos de la dinámica.

¿Entonces cómo se ha podido llegar a realizar velocidades mil veces más grandes que la de Mercurio, iguales a un décimo y a un tercio y aun a más de la velocidad de la luz? Pues es merced a la ayuda de los rayos catódicos y los del radio.

Se sabe que el radio emite tres clases de rayos, que se designan con las tres letras griegas α , β , γ ; a continuación, y salvo mención expresa de lo contrario, se tratará siempre de rayos β , que son análogos a los rayos catódicos.

A raíz del descubrimiento de los rayos catódicos, dos teorías se encontraron en litigio: Crookes atribuía los fenómenos a un verdadero bombardeo molecular; Hertz, a ondulaciones particulares del éter. Era el renacimiento del debate que había dividido a los físicos hacía un siglo con motivo de la luz; Crookes defendía la teoría de la emisión, abandonada por la de la luz; Hertz sostenía la teoría ondulatoria. Los hechos parecen dar la razón a Crookes.

Se ha reconocido en primer lugar que los rayos catódicos transportan una carga eléctrica negativa; que son desviados por un campo eléctrico y por un campo magnético; estas desviaciones precisamente son las que producirían estos mismos campos, sobre proyectiles dotados de gran velocidad y con fuertes cargas de electricidad. Estas dos desviaciones dependen de dos cantidades; la velocidad por una parte y la relación de la carga eléctrica del proyectil con su masa por la otra parte, no se puede conocer el valor absoluto de esta masa ni el de su carga, sino sólo su relación; es claro, en efecto, si se duplica a la vez la carga y la masa sin cambiar la velocidad, se duplicará la fuerza que tiende a desviar el proyectil; pero como su masa ha sido igualmente duplicada, la aceleración y la desviación que se pueden observar no serán cambiadas. La observación de estas dos desviaciones nos dará dos ecuaciones para determinar estas dos incógnitas. Se encuentra una velocidad de 10.000 a 30.000 kilómetros por segundo; en cuanto

a la relación de la carga con la masa es muy grande. Se la puede comparar con la relación correspondiente en lo que concierne al ión hidrógeno en la electrólisis; ve entonces que un proyectil catódico transporta aproximadamente mil veces más electricidad que la que transportará una masa igual de hidrógeno en un electrólito.

Para confirmar estos puntos de vista es necesario una medida directa de esta velocidad que se compararía con la velocidad así calculada. Las viejas experiencias de J. J. Thompson habían dado resultados más de cien veces demasiado débiles, pero estaban ligadas a ciertas causas de error. El problema fué resuelto por Wiechert con un dispositivo en el que se utilizaban las oscilaciones hertzianas; se ha llegado a resultados concordantes con la teoría; al menos como orden de grandeza, sería de gran interés volver a estas experiencias. Sea lo que sea, la teoría de las ondulaciones parece impotente para explicar este conjunto de hechos.

Los mismos cálculos hechos sobre los rayos del radio han dado velocidades aun mayores: 100.000, 200.000 kilómetros y más aún. Estas velocidades sobrepasan mucho a todas las que conocemos. La luz, es verdad, se sabe desde hace mucho tiempo, recorre 300.000 kilómetros por segundo; pero no transporta materia, mientras que si se adopta la teoría de la emisión por los rayos catódicos, habrá moléculas materiales realmente animadas de esas velocidades. Conviene tratar de buscar si las leyes comunes de la mecánica les son aún aplicables.

II

MASA LONGITUDINAL Y MASA TRANSVERSAL

Se sabe que las corrientes eléctricas dan lugar a fenómenos de inducción, especialmente de inducción propia. Cuando una corriente crece, se desarrolla una fuerza electromotriz de autoinducción que tiende a oponerse a la co-

riente; por el contrario, cuando la corriente disminuye, la fuerza electromotriz de autoinducción tiende a mantener la corriente. La autoinducción se opone entonces a toda variación de la intensidad de corriente, lo mismo que en mecánica, la inercia de un cuerpo se opone a toda variación de su velocidad. *La autoinducción es una verdadera inercia.*

Todo sucede como si la corriente no pudiera establecerse sin poner en movimiento el éter cercano y como si la inercia de este éter tendiese a mantener constante la intensidad de esta corriente, será preciso vencerla aún para hacerla cesar.

Un rayo catódico, que es una lluvia de proyectiles cargados de electricidad negativa, puede ser asimilada a una corriente; sin duda esta corriente difiere primero de las corrientes de conducción común, en que la materia está inmóvil y la electricidad circula a través de la materia. Es una *corriente de convección* en que la electricidad aplicada a un vehículo material es transportada por el movimiento de este vehículo. Pero Rowland ha demostrado que las corrientes de convección producen los mismos efectos que las corrientes de conducción; deben producir también los mismos efectos de inducción. Primero, si no es así, el principio de la conservación de la energía será violado; por otra parte, Cremieu y Penderhan han empleado un método en el que se ponía en evidencia *directamente* estos efectos de inducción.

Si la velocidad de un corpúsculo catódico llega a variar, la intensidad de la corriente correspondiente variará igualmente, y se desarrollarán los efectos de inducción propia que tenderán a oponerse a esta variación.

Estos corpúsculos deben tener, por lo tanto, una doble inercia: primero su inercia propia y segundo la inercia aparente debida a la autoinducción que produce los mismos efectos. Tendrán entonces una masa total aparente, compuesta de su masa real y de una masa ficticia de origen electromagnético. El cálculo muestra que esta masa ficticia varía con la velocidad y que la fuerza de inercia de auto-

inducción no es la misma cuando la velocidad del proyectil se acelera o se frena, o cuando es desviada; lo mismo sucede con la fuerza de inercia aparente total.

La masa total aparente no es por lo tanto la misma, cuando la fuerza real aplicada al corpúsculo es paralela a su velocidad, pues tiende a acelerar el movimiento, o cuando es perpendicular a esta velocidad y tiende a hacer variar la dirección. Es preciso entonces distinguir la *masa total longitudinal* y la *masa total transversal*.

Estas dos masas totales dependen, por otra parte, de la velocidad. He aquí lo que resulta de los trabajos teóricos de Abraham.

En las medidas de que hablamos en el capítulo precedente, ¿qué es lo que se determina midiendo las dos desviaciones? Es la velocidad por una parte y por otra la relación de la carga con la masa transversal total.

¿Cómo en estas condiciones hacer en esta masa total la parte de la masa real y la de la masa ficticia electromagnética? Si no hubiese más que los rayos catódicos, propiamente dichos, no habría en qué soñarlo, pero felizmente tenemos los rayos del radio que hemos visto que son notablemente más rápidos. Estos rayos no todos son idénticos y no se comportan de la misma manera bajo la acción de un campo eléctrico y magnético. Sucede que la desviación eléctrica es función de la desviación magnética y se puede, recibiendo sobre una placa sensible a los rayos del radio que han sufrido la acción de dos campos, fotografiar la curva que representa la relación entre estas dos desviaciones. Esto es lo que ha hecho Kaufman, quien ha deducido la relación entre la velocidad y la relación de la carga con la masa aparente total, relación que llamaremos ϵ .

Se podría suponer que existen varias especies de rayos, caracterizados cada uno por una velocidad determinada, por una carga determinada y por una determinada relación. Pero esta hipótesis es poco verosímil. ¿Por qué todos los corpúsculos de la misma masa toman siempre la misma velocidad? Es muy natural suponer que la carga lo mismo que la masa real sean iguales para todos los proyectiles y

que éstos no difieren más que por su velocidad. Si la relación ϵ es función de la velocidad, no es porque la masa real varíe con esta velocidad la masa total aparente, única que se puede, debe depender, aunque la masa real no depende y sea constante.

Los cálculos de Abraham nos enseñan la ley de acuerdo a la cual la masa ficticia varía en función de la velocidad; la experiencia de Kaufman nos hace conocer la ley de variación de la masa *total*. La comparación de estas dos leyes nos permitirá, por lo tanto, determinar la relación de la masa real con la masa total.

Tal es el método del que se ha servido Kaufman para determinar esta relación. El resultado es sorprendente, *la masa real es nula*.

Se encuentra uno de esta manera conducido a concepciones totalmente inesperadas. Se ha extendido a todos los cuerpos lo que sólo se había demostrado para los corpúsculos catódicos. Lo que llamamos masa no es más que una apariencia; toda inercia sería de origen electromagnético. Pero entonces la masa no sería más constante, aumentaría con la velocidad; sensiblemente constante para las velocidades, pudiendo llegar hasta mil kilómetros por segundo, crecería a continuación y llegaría a ser infinita para la velocidad de la luz. La masa transversal no será ya igual a la masa longitudinal; serán aproximadamente iguales si la velocidad no es muy grande. El principio B de la mecánica habría cesado de ser verdadero.

III

LOS RAYOS CANALES

En el lugar en que estamos esta conclusión puede parecer prematura. ¿Puede aplicarse a toda la materia lo que no ha sido establecido más que para los corpúsculos, tan livianos que no son más que una emanación de la materia y puede ser que no de la verdadera materia? Pero antes

de abordar este problema, es necesario decir una palabra de otra clase de rayos. Me refiero a los rayos canales, los Kanalstrahlen de Golsteind. El cátodo, lo mismo que los rayos catódicos cargados de electricidad negativa, emiten los rayos canales cargados de electricidad positiva. En general, estos rayos canales, no siendo rechazados por el cátodo, permanecen en las cercanías de este cátodo en la que constituyen *la capa de gamuza*, que no es fácil de ver; pero si el cátodo está taladrado y si obstruye casi completamente el tubo, los rayos canales se propagarán detrás del cátodo, en dirección contraria a la de los rayos catódicos y se tornará posible su estudio. Es así cómo se ha logrado poner en evidencia su carga positiva y demostrar que las desviaciones magnéticas y eléctricas existen aún como para los rayos catódicos, aunque mucho más débiles.

El radio emite también rayos análogos a los rayos canales, relativamente muy absorbibles, que se llaman rayos α .

Se puede, como para los rayos catódicos, medir las dos desviaciones y deducir la velocidad y la referencia ϵ . Los resultados son menos constantes que para los rayos catódicos, pero la velocidad es más débil lo mismo que la relación ϵ ; los corpúsculos positivos están menos cargados que los corpúsculos negativos, o, lo que es más natural, se supone que las cargas son iguales y de signo contrario, los corpúsculos positivos son mucho más gruesos. Estos corpúsculos, cargados unos positivamente y otros negativamente, reciben el nombre de electrones.

IV

LA TEORÍA DE LORENTZ

Pero los electrones no manifiestan solamente su existencia en estos rayos en los que se nos aparecen animados de enormes velocidades. Los vamos a ver en papeles bastante diferentes, y son ellos los que nos indicarán los prin-

cipales fenómenos de la óptica y de la electricidad. La brillante síntesis de la cual vamos a decir una palabra es debida a Lorentz.

La materia está formada por electrones portadores de cargas enormes y, si nos parece neutra, es porque las cargas de estos electrones se compensan. Se puede representar, por ejemplo, una especie de sistema solar formado por un grueso electrón positivo, alrededor del cual gravitarán numerosos planetas pequeños que serían los electrones negativos, atraídos por la electricidad de signo contrario con que está cargado el electrón central. Las cargas negativas de estos planetas compensarían la carga positiva de este Sol, de tal manera que la suma algebraica de todas estas sumas sería nula.

Todos estos electrones flotarían en el éter. El éter sería en todas partes idéntico a sí mismo, y las perturbaciones se propagarían en él de acuerdo a las leyes de luz o de las oscilaciones hertzianas en el vacío. Fuera de los electrones y del éter no habría nada. Cuando una onda luminosa penetrase en una parte del éter en que los electrones fueran numerosos, estos electrones se pondrían en movimiento bajo la influencia de la perturbación del éter, e inmediatamente reaccionarían sobre el éter. Es de esta manera que se explicaría la refracción, la dispersión, la doble refracción y la absorción. Lo mismo si un electrón se pone en movimiento por una causa cualquiera, enturbiará el éter alrededor de él, y daría origen a las ondas luminosas, lo que explicaría la emisión de luz por los cuerpos incandescentes. En ciertos cuerpos, los metales, por ejemplo, tendríamos electrones inmóviles, entre los cuales circularían los electrones móviles gozando de una completa libertad, salvo la de salir del cuerpo metálico y franquear la superficie que los separa de la vida exterior o del aire, o de todo otro cuerpo no metálico. Estos electrones móviles se comportan entonces en el interior del cuerpo metálico como lo hacen, de acuerdo a la teoría cinética de los gases, las moléculas de un gas en el interior del bocal en que este gas está encerrado. Pero, bajo la influencia de una diferencia de potencial, los electrones móviles negativos ten-

derían a ir todos de un lado y los electrones móviles positivos de otro. Esto es lo que produciría las corrientes eléctricas y es *por eso que estos cuerpos serían conductores*. Por otra parte las velocidades de nuestros electrones serían tanto más grandes cuanto más elevada fuera la temperatura, si aceptamos la asimilización con la teoría cinética de los gases. Cuando uno de esos electrones móviles vuelve a encontrar la superficie del cuerpo metálico, superficie que no puede franquear, se reflejará como una bola de billar que ha tocado la banda y su velocidad sufrirá un brusco cambio de dirección. Pero cuando un electrón cambia de dirección, tal como lo veríamos más adelante, se convierte en fuente de una onda luminosa y es por esto que los metales son incandescentes.

En otros cuerpos, los dieléctricos y los cuerpos transparentes, los electrones móviles gozan de una libertad mucho más grande. Permanecen ligados a los electrones fijos que los atraen. Cuanto más se alejan, más grande se torna esta atracción y tiende a hacerlos volver. No pueden sufrir, por lo tanto, más que pequeños alejamientos; no pueden circular más, sino sólo oscilar alrededor de su posición media. Es por esta razón que estos cuerpos no son conductores, y son por otra parte frecuentemente transparentes y son refringentes, porque las vibraciones luminosas se comunican a los electrones móviles susceptibles de oscilación, de lo que resultaría una perturbación.

No puedo dar aquí el detalle de los cálculos, me limitaré a decir que esta teoría da cuenta de todos los hechos conocidos y que ha hecho prever los nuevos, tales como el fenómeno de Zeeman.

V

CONSECUENCIAS MECÁNICAS

Ahora estamos en condiciones de encarar dos hipótesis:

1º Los electrones positivos poseen una masa real, mucho más grande que su masa ficticia electromagnética; los electrones negativos solamente están desprovistos de masa real. Se podría suponer que además de los electrones de dos signos, hay átomos neutros que no tienen otra masa que la real. En este caso la mecánica no tiene nada que ver, no tenemos necesidad de tocar sus leyes; la masa real es constante, sólo los movimientos son trastornados por los efectos de autoinducción, lo que siempre hemos sabido; estas perturbaciones son por otra parte casi despreciables, salvo para los electrones negativos que no tienen masa real y que no son verdadera materia.

2º Pero hay otro punto de vista; se puede suponer que no hay átomos neutros y que los electrones positivos están desprovistos de masa real de la misma manera que los electrones negativos. Pero entonces la masa real se desvanece y la palabra masa carece de sentido, o será preciso que designe la masa ficticia electromagnética; en este caso la masa no será ya más constante, la masa transversal no será ya más igual a la masa longitudinal, los principios de la mecánica se habrán derribado.

Antes que nada una palabra de explicación. Hemos dicho que para una misma carga, la masa total de un electrón positivo es mucho más grande que la de un electrón negativo. Entonces es natural pensar que esta diferencia se explica, puesto que el electrón positivo, además de su masa ficticia, tiene una masa real considerable, lo que nos llevará a la primera hipótesis. Pero se puede admitir igualmente que la masa real es igualmente nula tanto para los unos como para los otros, pero que la masa ficticia del electrón positivo es mucho más grande, puesto que este electrón es mucho más pequeño, he dicho bien: mucho

más pequeño. Y, en efecto, en esta hipótesis la inercia de origen exclusivamente electromagnético se reduce a la inercia del éter, los electrones no son nada por ellos mismos; son solamente agujeros en el éter, alrededor de los cuales se agita el éter, más grande será, por consecuencia, la inercia del éter.

¿Cómo decidir entre estas dos hipótesis? Experimentando sobre los rayos canales, como ha hecho Kaufman sobre los rayos β . Es imposible la velocidad de estos rayos, es demasiado débil. ¿Deberá cada uno decidirse de acuerdo a su temperamento, los conservadores yendo de un lado y los amigos de lo nuevo del otro? Puede ser, pero para hacer comprender bien los argumentos de los innovadores es preciso hacer intervenir otras consideraciones.

CAPÍTULO II

LA MECÁNICA Y LA ÓPTICA

I

LA ABERRACIÓN

Sabemos en qué consiste el fenómeno de la aberración descubierto por Bradley. La luz emanada de una estrella tarda cierto tiempo en recorrer un lente; durante este tiempo, el lente llevado por el movimiento de la Tierra se ha desplazado. Si entonces se dirige el lente en la dirección verdadera de la estrella, la imagen se formará en el punto que ocupa la cruz de los hilos del retículo cuando la luz haya alcanzado el objetivo; esta cruz no estará en el mismo punto cuando la luz alcance el plano del retículo. Tendremos entonces que centrar el lente para volver a traer la imagen sobre el cruce de los hilos. Resulta que el astrónomo no centrará el lente en la dirección de la velocidad absoluta de la luz, es decir, sobre la verdadera posición de la estrella, sino en la dirección de la velocidad relativa de la luz con relación a la Tierra, es decir, sobre lo que se llama la posición aparente de la estrella.

La velocidad de la luz es conocida; podríamos creer entonces que tenemos el medio de calcular la velocidad absoluta de la Tierra. (Me explicaré a continuación sobre esta palabra absoluta). No es nada, conocemos bien la posición aparente de la estrella que observamos; pero no conocemos su posición verdadera, no conocemos la velocidad de la luz más que en su medida y no en su dirección.

Si entonces la velocidad absoluta de la Tierra fuera rectilínea y uniforme, no habríamos nunca sospechado el fenómeno de la aberración; pero es invariable, se compone de dos partes: la velocidad del sistema solar, que es rectilínea y uniforme, y la velocidad de la Tierra con relación al Sol, que es variable. Si la velocidad del sistema solar, es decir, si la parte constante existiera sola, la dirección observada sería invariable. Esta posición se denomina posición aparente media de la estrella.

Si tomamos en cuenta a la vez las dos partes que forman la velocidad de la Tierra, tendremos la posición aparente actual, que describe una pequeña elipse alrededor de la posición aparente media, y es esta elipse lo que se observa.

Despreciando cantidades muy pequeñas, veremos que las dimensiones de esta elipse dependen de la relación de la velocidad de la Tierra con relación al Sol, de la velocidad de la luz, de manera que la velocidad *relativa* de la Tierra con relación al Sol solamente ha intervenido.

Alto ahí. Este resultado no es riguroso, no es más que aproximado, coloquemos la aproximación un poco más lejos. Las dimensiones de la elipse dependerán entonces de la velocidad absoluta de la Tierra. Comparemos los grandes ejes de la elipse para las diferentes estrellas: tendremos, por lo menos, teóricamente el medio de determinar esta velocidad absoluta.

Puede ser que esto sea menos chocante que lo que parece a primera vista, no se trata, en efecto, de la velocidad con relación a un vacío absoluto, sino de la velocidad con relación al éter, que lo miramos *por definición* como si estuviera en reposo absoluto.

Por otra parte este medio es totalmente teórico. En efecto, la aberración es muy pequeña; las posibles variaciones de la elipse de aberración son mucho más pequeñas aun, y si miramos la aberración como de primer orden, ellas deben ser miradas entonces como de segundo orden, cerca de un milésimo de segundo; son absolutamente inapreciables para nuestros instrumentos. En fin, veremos más lejos, por qué la teoría precedente debe ser rechazada

y por qué no podríamos determinar esta velocidad aunque nuestros instrumentos fueran diez mil veces más precisos.

Se puede imaginar otro medio, ya se ha pensado, en efecto. ¿La velocidad de la luz no es la misma en el agua que en el aire?; ¿no se podría comparar las dos posiciones aparentes de una estrella vista a través de un lente algunas veces lleno de aire, otras lleno de agua? Los resultados han sido negativos; las leyes aparentes de la reflexión y de la refracción no han sido alteradas por el movimiento de la Tierra. Este fenómeno comporta dos explicaciones:

1º Se puede suponer que el éter no está en reposo, pero que es llevado por los cuerpos en movimiento. No sería sorprendente entonces que los fenómenos de refracción fueran alterados por el movimiento de la Tierra, puesto que todo, prismas, lentes y éter, es llevado a la vez en una misma traslación. En cuanto a la aberración, se explicaría por una especie de refracción producida en la superficie de separación del éter en reposo en los espacios interestelares y del éter llevado por el movimiento de la Tierra. Es sobre esta hipótesis (acarreos total del éter) que se ha fundado la teoría de Hertz sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento.

2º Fresnel, por el contrario, supone que el éter está en reposo absoluto en el vacío, en reposo casi absoluto en el aire, cualquiera que sea la velocidad de este aire, y que es parcialmente arrastrado por los centros refringentes.

Lorentz ha dado a esta teoría una forma más satisfactoria. Para él el éter está en reposo, sólo los electrones están en movimiento; en el vacío, donde solamente el éter entra en juego, en el aire, donde entra casi solo en juego, el acarreo es casi nulo, o nulo, en los centros refringentes donde la perturbación es producida a la vez por las vibraciones del éter y por las de los electrones puestos en movimiento, por la agitación del éter las ondulaciones se encuentran parcialmente acarreadas.

Para decidir entre las dos hipótesis, tenemos la experiencia de Fizeau, que ha comparado, midiendo las franjas de interferencia, la velocidad de la luz en el aire, en reposo o en movimiento, lo mismo que en el agua, en repo-

so o en movimiento. Estas experiencias han confirmado la hipótesis del acarreo parcial de Fresnel. Han sido estrías con el mismo resultado por Michelson. *La teoría de Hertz debe ser por lo tanto rechazada.*

II

EL PRINCIPIO DE RELATIVIDAD

Pero si el éter no es acarreado por el movimiento de la Tierra, ¿es posible saber, por medio de fenómeno óptico, la velocidad absoluta de la Tierra, o, mejor dicho, su velocidad con relación al éter inmóvil?

La experiencia ha respondido negativamente y no obstante se han variado los procedimientos experimentales de todas las maneras posibles. Cualquiera que sea el medio que se emplea, no se podrá nunca descubrir sino velocidades relativas, me refiero a las velocidades de ciertos cuerpos materiales con relación a otros cuerpos materiales. En efecto, si la fuente de la luz y los aparatos de observación están sobre la Tierra y participan de su movimiento, los resultados experimentales serán siempre los mismos, cualquiera que sea la orientación del aparato con relación a la dirección del movimiento orbital de la Tierra. Si la aberración astronómica se produce, es porque la fuente que es una estrella está en movimiento con relación al observador.

Las hipótesis hechas hasta aquí demuestran perfectamente este resultado general, *si se desprecian las cantidades muy pequeñas del orden del cuadrado de la aberración.* La explicación se apoya sobre la noción del *tiempo local*, que voy a tratar de hacer comprender y que ha sido introducida por Lorentz. Supongamos dos observadores, colocado el uno en A, el otro en B, que quieren sincronizar sus relojes por medio de señales ópticas. Se ponen de acuerdo en que B enviará una señal a A, cuando su reloj marque una determinada hora, A pone su reloj en hora cuando

vea la señal. Si operasen de esta manera, habría un error sistemático, porque como la luz tarda cierto tiempo para ir de B a A, el reloj de A va a retrasar un tiempo sobre el de B.

Este error es fácil de corregir. Basta cruzar las señales. Es preciso que A envíe a su vez las señales a B, después de este nuevo reglaje, será el reloj de B quien retrasará un tiempo sobre el de A. Bastará entonces con obtener la media aritmética entre los dos relojes.

Pero esta manera de obrar supone que la luz tardará lo mismo para ir de A a B y para volver de B a A. Esto es verdad si los observadores están inmóviles, no lo será si son acarreados en una translación común, puesto que entonces A, por ejemplo, irá delante de la luz que viene de B, mientras que éste huirá delante de la luz que viene de A. Si entonces los observadores son llevados en una translación común y si no lo sospechan, su reglaje será defectuoso. Sus relojes no indicarán la misma hora, alguno de ellos indicará el *tiempo local* conveniente al punto donde se encuentra.

Los dos observadores no tendrán ningún medio de darse cuenta si el éter inmóvil no puede transmitirles más que señales luminosas, marchando todas con la misma velocidad y si las otras señales que podrían enviarse les son transmitidas por medios acarreados con ellos en su translación. El fenómeno que cada uno observará estará ya sea adelantado o retrasado; no se producirá en el mismo momento a menos que la translación no existiera; pero como se observará con un reloj mal reglado, no se verá y las apariencias no serán alteradas.

Resulta de ahí que la compensación es fácil de explicar mientras se desprecie el cuadrado de la aberración, durante mucho tiempo las experiencias han sido demasiado imprecisas para que se tomara esto en cuenta. Pero un día Michelson imaginó un procedimiento mucho más delicado; hizo interferir rayos que habían recorrido trayectos diferentes después de haber sido reflejados sobre espejo, todos los trayectos tenían aproximadamente un metro y las franjas de interferencia permitían apreciar diferencias de una

fracción de milésimo de milímetro, no se podía seguir despreciando el cuadrado de la aberración y no obstante los resultados fueron aún negativos. La teoría pedía entonces ser completada y lo ha sido por la *hipótesis de Lorentz y de Fitzgerald*.

Estos dos físicos suponen que todos los cuerpos acarreados en una translación sufren una contracción en el sentido de esta translación, mientras que sus dimensiones perpendiculares a esta translación permanecen invariables. *Esta contracción es la misma para todos los cuerpos*; es por otra parte muy débil, cerca de doscientas millonésimas para una velocidad como la de la Tierra. Nuestros instrumentos de medida no podrían por otra parte descubrirlas aunque fueran mucho más precisos; los metros con los cuales medimos sufrirían, en efecto, la misma contracción que los objetos a medir. Si un cuerpo se aplica exactamente sobre el metro, cuando se oriente el cuerpo, y por consiguiente el metro en el sentido del movimiento de la Tierra, no cesará de aplicarse exactamente sobre el metro en otra orientación, y esto a pesar que el cuerpo y el metro hayan cambiado de longitud al mismo tiempo que de orientación, precisamente porque el cambio es exactamente el mismo para el uno como para el otro. Pero no es lo mismo si medimos una longitud, no con un metro, sino con el tiempo que la luz tarda en recorrerla, esto es precisamente lo que ha hecho Michelson.

Dije antes que de acuerdo a las teorías comunes las observaciones de la aberración astronómica podrían hacer conocer la velocidad absoluta de la Tierra si nuestros instrumentos fuesen mil veces más precisos. Me es preciso modificar esta conclusión. Sí, los ángulos observados serían modificados por esta velocidad absoluta, pero los diversos círculos de los cuales nos serviríamos para medir los ángulos serían modificados por la translación, se volverían elipses, resultaría un error sobre el ángulo medido. Y éste segundo error compensaría exactamente el primero.

Esta hipótesis de Lorentz y Fitzgerald parecerá al principio increíble; todo podemos decir por el momento en su favor, es que no es más que la traducción inmediata del

resultado experimental de Michelson si se definen las longitudes por los tiempos que la luz tarda en recorrerlas.

Sea lo que fuere, es imposible escapar a esta impresión que el Principio de Relatividad es una ley general de la Naturaleza, que no se podrá jamás por ningún medio imaginable poner en evidencia, que las velocidades relativas, y entiendo por ello no solamente las velocidades de los cuerpos con relación al éter, sino también las velocidades de los cuerpos los unos con relación a los otros. Demasiadas y diversas experiencias han dado resultados concordantes para que no estemos tentados de atribuir a este principio de relatividad un valor comparable al del principio de equivalencia, por ejemplo. Conviene en todo caso ver a qué consecuencias nos conduciría esta manera de ver y de someter en seguida las consecuencias al control de la experiencia.

III

EL PRINCIPIO DE REACCIÓN

Veamos en qué se convierte, en la teoría de Lorentz, el principio de la igualdad de acción y de la reacción. He aquí un electrón A, que se pone en movimiento por una causa cualquiera; produce una perturbación en el éter; al cabo de cierto tiempo, esta perturbación alcanza otro electrón B, que será molestado en su posición de equilibrio. En estas condiciones no puede haber igualdad entre la acción y la reacción, al menos si no se considera el éter, sino solamente los electrones que se pueden observar, puesto que nuestra materia está formada de electrones.

En efecto, es el electrón A el que ha desequilibrado al electrón B; entonces aunque el electrón B reaccionara sobre A, esta reacción podría ser igual a la acción, pero no podría en ningún caso ser simultánea, puesto que el electrón B no podrá entrar en movimiento sino después de cierto tiempo, necesario para la propagación. Si se somete

el problema a un cálculo más preciso se llega al resultado siguiente: supongamos un excitador de Hertz colocado en el centro de un espejo parabólico al que está ligado mecánicamente; este excitador emite ondas electromagnéticas y el espejo refleja todas estas ondas en la misma dirección; el excitador va entonces a irradiar la energía en determinada dirección. Pues el cálculo muestra que el excitador va a retroceder como un cañón que ha enviado un proyectil. En el caso del cañón el retroceso es el resultado natural de la igualdad de la acción y de la reacción. El cañón retrocede porque el proyectil sobre el cual ha obrado retrocede sobre él.

Pero aquí no es lo mismo. Lo que hemos enviado no es un proyectil material, es energía, y la energía no tiene masa; no hay contrapartida y en lugar de un excitador podemos considerar una lámpara con reflector concentrando sus rayos en una dirección.

Es verdad que si la energía emanada del excitador o de la lámpara llega a alcanzar un objeto material, este objeto va a sufrir un empuje mecánico como si fuera alcanzado por un proyectil verdadero y este empuje será igual al retroceso del excitador y la lámpara, si no ha perdido energía en el camino y si el objeto absorbe esta energía en su totalidad. Estaremos tentados de decir que hay compensación entre la acción y la reacción. Pero esta compensación, aunque sea completa, es siempre retardada. No se produce jamás si la luz, después de haber abandonado la fuente, vaga por los espacios interestelares sin encontrar un cuerpo material, es incompleta si el cuerpo en que choca no es muy absorbente.

Estas acciones mecánicas, ¿son demasiado pequeñas para ser medidas, o son accesibles a la experiencia? Estas acciones no son otra cosa que las que son debidas a las presiones Maxwell-Bartholi; Maxwell había previsto estas presiones por cálculos relativos a la electroestática y al magnetismo; Bartholi había llegado al mismo resultado por consideraciones de electrodinámica.

Así es como se explican las colas de los cometas. Pequeñas partículas se desprenden del núcleo del cometa, son

golpeadas por la luz del Sol que las rechaza como pasaría con una lluvia de proyectiles procedentes del Sol. La masa de estas partículas es tan pequeña que esta repulsión se sobrepone a la atracción newtoniana; van entonces a formar las colas alejándose del Sol.

La verificación experimental directa no es fácil de obtener. La primera tentativa ha conducido a la construcción del radiómetro. Pero este aparato da vueltas al revés, en el sentido opuesto al sentido teórico, y la explicación de su rotación descubierta después es totalmente diferente. Se ha obtenido, en fin, llevando más lejos el vacío por una parte y por otra no ennegreciendo una de las caras de las paletas y dirigiendo un haz luminoso sobre una de sus caras. Los efectos radiométricos y las otras causas perturbadoras son eliminadas mediante una serie de precauciones minuciosas y se obtiene una desviación que es muy pequeña, pero que parece que está conforme a la teoría. Los mismos efectos de la presión Maxwell-Bartholi están previstos igualmente por la teoría de Hertz de la cual hemos hablado antes y por la de Lorentz. Pero hay una diferencia. Supongamos que la energía bajo la forma de luz, por ejemplo, vaya de una fuente luminosa a un cuerpo cualquiera a través de un medio transparente. La presión Maxwell-Bartholi no solamente sobre la fuente de partida y sobre el cuerpo alumbrado, sino sobre la materia del medio transparente que atraviesa. En el momento que la onda luminosa alcance una región nueva de este medio, esta presión empujará hacia adelante la materia que se encuentra desparramada y la atraerá hacia atrás cuando la onda se retire de esta región. De tal manera que el retroceso de la fuente tiene por contrapartida la marcha hacia adelante de la materia transparente que se encuentra en contacto con esa fuente; un poco más tarde el retroceso de esa misma materia tiene por contrapartida la marcha hacia adelante de la materia transparente que se encuentra un poco más lejos y así seguidamente.

¿Sólo la compensación es perfecta? ¿La acción de la presión Maxwell-Bartholi sobre la materia del medio transparente es igual a su reacción sobre la fuente, y esto cual-

quiera que sea esta materia? ¿O esta acción en tanto más pequeña cuanto el medio es menos refringente y más rareficado para tornarse nula en el vacío? Si se admitiera la teoría de Hertz, que considera la materia mecánicamente ligada al éter, de manera que el éter es acarreado enteramente por la materia, será preciso responder que sí a la primera pregunta y no a la segunda.

Habría entonces compensación perfecta, como lo exige el principio de la igualdad de la acción y de la reacción, lo mismo en los medios menos refringentes, en el aire, o en la vida interplanetaria, donde bastará suponer un resto de materia por sutil que ésta sea. Si se admite por el contrario la teoría de Lorentz, la compensación siempre imperfecta es siempre insensible en el aire y se torna nula en el vacío.

Pero hemos visto antes que la experiencia de Fizeau nos permite conservar la teoría de Hertz, es preciso entonces adoptar la teoría de Lorentz, y por consiguiente *renunciar al principio de reacción*.

IV

CONSECUENCIAS DEL PRINCIPIO DE RELATIVIDAD

Hemos visto, antes, las razones que conducen a considerar el Principio de la Relatividad como una ley general de la Naturaleza. Veamos a qué consecuencia nos conduciría este principio, si lo mirásemos como definitivamente demostrado. Primero, nos obligaría a generalizar la hipótesis de Lorentz y Fitzgerald sobre la contracción de todos los cuerpos en el sentido de la translación.

En particular debemos hacer extensible esta hipótesis a los electrones mismos. Abraham consideraba estos electrones como esféricos e indeformables; no será necesario admitir que estos electrones, esféricos cuando están en reposo, sufren la contracción de Lorentz cuando están en movimiento, y toman entonces la forma de elipsoides aplastados.

Esta deformación de los electrones va a influir sobre sus propiedades mecánicas. En efecto, he dicho que el desplazamiento de estos electrones cargados es una verdadera corriente de convención, y que su inercia aparente es debida a la autoinducción de su corriente: exclusivamente en lo que concierne a los electrones negativos; exclusivamente o no, no sabemos nada aún para los electrones positivos.

Y la deformación de los electrones, deformación que depende de su velocidad, va a modificar la distribución de la electricidad en su superficie, por consiguiente la intensidad de corriente de convención que produce y de las leyes de acuerdo a las cuales la autoinducción de esta corriente variará en función de la velocidad.

A este precio la compensación será perfecta y conforme a las exigencias del Principio de Relatividad, pero esto con dos condiciones:

1º Que los electrones positivos no tengan masa real, sino sólo una masa ficticia electromagnética, o al menos que su masa real, si existe, no sea constante y varíe con la velocidad, siguiendo las mismas leyes que su masa ficticia.

2º Que todas las fuerzas sean de origen electromagnético, o al menos que varíen con la velocidad siguiendo las mismas leyes que las fuerzas de origen electromagnético.

Es aún Lorentz quien ha hecho esta notable síntesis; detengámonos un instante y veamos lo que se desprende. Primero, no hay más materia, puesto que los electrones positivos no tienen más masa real, o al menos más masa real constante. Los principios actuales de nuestra Mecánica fundados sobre la constancia de la masa deben ser por lo tanto modificados.

A continuación es necesario hallar una explicación electromagnética de todas las fuerzas conocidas, en particular de la gravitación, o al menos modificar la ley de la gravitación de la misma manera que las fuerzas electromagnéticas. Volveremos sobre este punto.

Todo esto parece primero un poco artificial. En particular esta deformación de los electrones parece un poco

hipotética. Pero se la puede presentar de otra manera, de manera que evitemos poner esta hipótesis de la deformación como base del razonamiento. Consideremos los electrones como puntos materiales y preguntémonos cómo debe variar su masa en función de la velocidad para no contravenir al principio de relatividad. O mejor aun, preguntémonos cuál debe ser su aceleración bajo la influencia de un campo electromagnético, para que este principio no sea violado y caiga sobre las leyes comunes suponiendo la velocidad muy débil. Encontraremos que las variaciones de esta masa o de estas aceleraciones deben pasar como si el electrón sufriera la deformación de Lorentz.

V

LA EXPERIENCIA DE KAUFMAN

Henos aquí, pues, en presencia de dos teorías: una en que los electrones son indeformables, es la de Abraham; en la otra sufren la deformación de Lorentz. En los dos casos, su masa crece con la velocidad, para tornarse infinita cuando esta velocidad llega a ser igual a la de la luz; pero la ley de la variación no es la misma. El método empleado por Kaufman para poner en evidencia la ley de variación de la masa parece darnos entonces un medio experimental para decidirnos entre las dos teorías.

Desgraciadamente, sus primeras experiencias no fueron muy precisas para esto, también ha creído deber reiniciarlas con más precauciones y midiendo con mucho cuidado la intensidad de los campos. Bajo su nueva forma han dado la razón a la teoría de Abraham. El Principio de Relatividad no tendrá entonces el valor que se ha tratado de atribuirle; no se tendría ninguna razón para creer que los electrones positivos están desprovistos de masa real como los electrones negativos.

Sin embargo, antes de adoptar esta conclusión definitivamente, es preciso reflexionar un poco. La cuestión es de tal importancia que sería de desear que la experiencia de Kaufman fuera tomada por otro experimentador (1). Desgraciadamente, esta experiencia es muy delicada y no podrá ser llevada a bien más que por un físico de la misma habilidad que el Sr. Kaufman. Todas las precauciones han sido tomadas y no se ve bien qué objeción se podrá hacer.

No obstante, hay un punto sobre el cual desearía llamar la atención: es sobre la medida del campo electroestático, medida de la que depende todo. Este campo era producido entre las dos armaduras de un condensador; y entre estas armaduras se había hecho un vacío casi perfecto, a fin de obtener un aislamiento perfecto. Se rindió entonces la diferencia de potencial de las dos armaduras y se obtuvo el campo dividiendo esta diferencia por la distancia de las armaduras. Esto supone que el campo es uniforme, ¿es esto cierto? ¿No puede ser que haya una caída de potencial en la vecindad de una de las armaduras, de la armadura negativa, por ejemplo? Puede haber una diferencia de potencial al contacto entre el metal y el vacío, y puede que esta diferencia no sea la misma del lado positivo que del negativo; lo que me inclinaría a creerlo son los efectos de válvula eléctrica entre el mercurio y el vacío. Por débil que sea la posibilidad para que sea así, parece que hay lugar para tenerla en cuenta.

(1) En el momento de poner en prensa nos enteramos que el señor Bucherer ha tomado la experiencia, rodeándose de nuevas precauciones, y que ha obtenido, por el contrario del señor Kaufman, resultados que confirman los puntos de vista de Lorentz.

VI

EL PRINCIPIO DE INERCIA

En la nueva Dinámica, el principio de inercia es aún verdadero, es decir, que un electrón aislado tendrá un movimiento rectilíneo y uniforme. Al menos generalmente se admite; entretanto, Lindeman ha hecho objeciones a esta manera de ver; no quiero tomar parte en esta discusión, que no puedo exponer aquí a causa de su carácter muy arduo. En todo caso, bastarán ligeras modificaciones para ponerse a cubierto de las objeciones de Lindeman. Se sabe que un cuerpo sumergido en un fluido experimenta, cuando está en movimiento, una resistencia considerable, pero es porque nuestros flúidos son viscosos. En un fluido ideal perfectamente desprovisto de viscosidad, el cuerpo agitaría detrás de él una popa líquida, una especie de estela; al principio sería preciso un gran esfuerzo para ponerlo en movimiento, puesto que precisaría poner en movimiento no solamente el cuerpo mismo sino el líquido de su estela. Pero una vez adquirido el movimiento, se perpetuaría sin resistencia, puesto que el cuerpo, avanzando, transportaría simplemente con él la perturbación del líquido, sin que la fuerza viva total de este líquido aumentara. Todo pasaría entonces como si su inercia estuviera aumentada. Un electrón avanzando en el éter se comportaría de la misma manera: alrededor de él, el éter estaría agitado, pero esta perturbación acompañaría al cuerpo en su movimiento; de manera que para un observador llevado con el electrón, los campos eléctricos y magnéticos que acompañasen a este electrón parecerían invariables y no podrían cambiar sino si la velocidad del electrón cambiara. Sería preciso entonces un esfuerzo

para poner el electrón en movimiento, puesto que se precisaría crear la energía de sus campos. Por el contrario, una vez adquirido el movimiento, ningún esfuerzo sería necesario para mantenerlo, puesto que la energía creada no tendría más que transportarse detrás del electrón como una estela. Esta energía entonces no puede más que aumentar la inercia del electrón como la agitación del líquido aumenta la del cuerpo sumergido en un fluido perfecto. Lo mismo los electrones negativos, o al menos no tienen otra inercia que ésta.

En la hipótesis de Lorentz, la fuerza viva, que no es otra que la energía del éter, no es proporcional a V^2 . Sin duda si V es muy débil, la fuerza viva es sensiblemente proporcional a V^2 , la cantidad de movimiento sensiblemente proporcional a V^2 , las dos masas sensiblemente constantes e iguales entre ellas. Pero *cuando la velocidad tiende hacia la velocidad de la luz, la fuerza viva, la cantidad de movimiento y las dos masas crecen más allá de todo límite.*

En la hipótesis de Abraham, las expresiones son un poco más complicadas, pero lo que acabamos de decir subsiste en sus rasgos más esenciales.

De esta manera, la masa, la cantidad de movimiento, la fuerza viva, llegan a ser infinitas cuando la velocidad es igual a la de la luz. Resulta que *ningún cuerpo podrá alcanzar por ningún medio una velocidad superior a la de la luz.* En efecto, a medida que su velocidad crece, su masa crece, de manera que su inercia opone a todo nuevo aumento de velocidad un obstáculo cada vez mayor.

Se plantea una cuestión entonces: admitamos el Principio de la Relatividad: un observador en movimiento no debe poder darse cuenta de su propio movimiento.

Si entonces ningún cuerpo en su movimiento absoluto puede sobrepasar la velocidad de la luz, pero puede aproximarse tanto como se quiera, debe ser lo mismo en lo que concierne a su movimiento relativo con relación a nuestro observador, y entonces se podría estar tentado

de razonar como sigue: El observador puede alcanzar una velocidad de 200.000 kilómetros por segundo; el cuerpo, en su movimiento relativo con relación al observador, puede alcanzar la misma velocidad; su velocidad absoluta será entonces de 400.000 kilómetros, lo que es imposible, puesto que es una cifra superior a la velocidad de la luz. Esto no es más que una apariencia que se desvanece cuando se tiene en cuenta la manera con la cual Lorentz evaluó los tiempos locales.

VII

LA ONDA DE LA ACELERACIÓN

Cuando un electrón está en movimiento, se produce en el éter que lo rodea una perturbación. Si este movimiento es rectilíneo y uniforme, esta perturbación se reduce a la estela a la que acabamos de referirnos en el capítulo precedente. Pero no es lo mismo si el movimiento es curvilíneo o variado. La perturbación puede ser entonces considerada como la superposición de otras dos, a las cuales Langevin ha dado los nombres de *onda de velocidad* y *onda de aceleración*.

La onda de velocidad no es otra que la estela que se produce en el movimiento uniforme.

En cuanto a la onda de aceleración, es una perturbación totalmente análoga a las ondas luminosas, que parten del electrón en el momento que sufre una aceleración y que se propaga a continuación por ondas esféricas sucesivas con la velocidad de la luz.

¿De dónde proviene esta consecuencia? En un movimiento rectilíneo y uniforme, la energía se conserva integralmente, pero en cuanto hay aceleración, hay pérdida de energía que se disipa bajo la forma de ondas luminosas que se van al infinito a través del éter.

Sin embargo, los efectos de esta onda de aceleración, en particular la pérdida de la energía correspondiente, son despreciables en la mayor parte de los casos, es decir, no solamente en la Mecánica ordinaria y en los movimientos de los cuerpos celestes, sino lo mismo en los rayos del radio donde la velocidad es muy grande, sin que lo sea la aceleración. Puede entonces limitarse a aplicar las leyes de la Mecánica, escribiendo que la fuerza es igual al producto de la aceleración de la masa. Esta masa, sin embargo, varía con la velocidad de acuerdo a las leyes antes mencionadas. Se dice entonces que el movimiento es casi estacionario.

No será lo mismo en todos los casos en que la onda de aceleración es grande y en los cuales los principales serán los siguientes: 1º En los gases incandescentes ciertos electrones toman un movimiento oscilatorio de alta frecuencia, los desplazamientos son muy pequeños, las velocidades finitas y las aceleraciones muy grandes; la energía se comunica entonces al éter y es por esto que estos gases irradian luz del mismo período que las oscilaciones del electrón. 2º A la inversa, cuando un gas recibe luz, estos mismos electrones son puestos en movimiento con fuertes aceleraciones y absorben luz. 3º En el excitador de Hertz, los electrones que circulan en la masa metálica sufren en el momento de la descarga una brusca aceleración y toman a continuación un movimiento oscilatorio de alta frecuencia. De lo que resulta que una parte de la energía irradia bajo forma de ondas hertzianas. 4º En un metal incandescente, los electrones encerrados en este metal están animados de grandes velocidades; pero al llegar a la superficie del metal, que no pueden franquear, se reflejan y sufren de esta manera una aceleración considerable. Es por esto que el metal emite luz. Es lo que he dejado explicado en el capítulo I, Nº IV (Libro Tercero). Los detalles de la emisión de la luz por los cuerpos negros están perfectamente explicados por esta hipótesis. 5º En fin, cuando los rayos catódicos vienen a golpear el antecátodo, los electrones negativos que constituyen estos rayos y

que están animados de grandes velocidades, son bruscamente detenidos. A consecuencia de la aceleración que sufren, producen ondulaciones en el éter. Sería esto según ciertos físicos el origen de los rayos Roentgen, que no son otra cosa que rayos luminosos de muy corta longitud de onda.

CAPÍTULO III

LA MECÁNICA NUEVA Y LA ASTRONOMÍA

I

LA GRAVITACIÓN

La masa puede ser definida de dos maneras: 1º por el cociente de la fuerza por la aceleración; esta es la verdadera definición de la masa, que mide la inercia del cuerpo. 2º, por la atracción que ejerce el cuerpo sobre un cuerpo exterior, en virtud de la ley de Newton. Debemos distinguir entonces la masa coeficiente de inercia y la masa coeficiente de atracción. Según la ley de Newton, hay proporcionalidad rigurosa entre estos dos coeficientes. Pero esto no se demuestra más que para las velocidades a las cuales los principios generales de la Mecánica son aplicables. Ahora hemos visto que la masa coeficiente de inercia crece con la velocidad. Debemos entonces deducir que la masa coeficiente de atracción crece igualmente con la velocidad y permanece proporcional al coeficiente de inercia; por el contrario, ¿que este coeficiente de atracción permanece constante? Este es un problema en el que no tenemos ningún medio para decidir.

Por otra parte, si el coeficiente de atracción depende de la velocidad, ¿cómo las velocidades de dos cuerpos que se atraen mutuamente no son generalmente las mismas?, ¿de qué manera este coeficiente dependerá de estas dos velocidades?

No podemos plantear con este motivo más que dos hipó-

tesis, pero naturalmente tratamos de buscar cuál de estas hipótesis sería compatible con el principio de la Relatividad. Hay un gran número, pero la única que voy a tratar es la de Lorentz, que voy a exponer brevemente.

Consideremos primero los electrones en reposo. Dos electrones del mismo signo se repelen, dos de signo contrario se atraen. En la teoría común, sus acciones mutuas son proporcionales a sus cargas ordinarias; si entonces tenemos cuatro electrones, dos positivos A y A' y los negativos B y B', siendo las cargas de estos cuatro electrones las mismas en valor absoluto, la repulsión de A sobre A' será, a la misma distancia, igual a la repulsión de B sobre B', e igual aún a la atracción de A sobre B o de A' sobre B'.

Si entonces A y B están muy cerca uno del otro, lo mismo que A' y B' y examinamos la acción del sistema A B sobre el sistema A' B', tendremos dos repulsiones y dos atracciones que se compensarán exactamente, y la acción resultante será nula. Sin embargo, las moléculas materiales deben ser miradas precisamente como especies de sistemas solares donde circulan los electrones, unos positivos y otros negativos, *de tal manera que la suma algebraica de todas las cargas sea nula*. Una molécula material es entonces totalmente asimilable al sistema A + B del que acabamos de hablar, de manera que la acción eléctrica total de dos moléculas una sobre la otra debería ser nula.

Pero la experiencia nos demuestra que estas moléculas se atraen a consecuencia de la gravitación newtoniana. Entonces, se pueden hacer dos hipótesis; se puede suponer que la gravitación no tenga ninguna relación con las atracciones electrostáticas, que sea debida enteramente a una causa diferente y que simplemente venga a superponerse; o bien se puede admitir que no haya proporcionalidad de las direcciones a las cargas y que la atracción ejercida por una carga + 1 sobre una carga - 1 es más grande que la repulsión mutua de dos cargas + 1, o que esta de dos cargas - 1.

En otros términos, el campo eléctrico producido por los

electrones positivos y el que producen los electrones negativos se superpondrían permaneciendo distintos. Los electrones positivos serían más sensibles al campo producido por los electrones negativos que al producido por los positivos; sería lo contrario para los electrones negativos. Es claro que esta hipótesis complica un poco la Electroestática, pero incluye la gravitación.

Esta es, en resumen, la hipótesis de Franklin.

¿Qué sucede entonces si los electrones están en movimiento? Los electrones positivos van a engendrar una perturbación en el éter y harán nacer un campo eléctrico y uno magnético. Lo mismo sucederá para los electrones negativos. Los electrones, tanto positivos como negativos, sufrirán a continuación una impulsión mecánica por la acción de estos diferentes campos. En la teoría común, el campo electromagnético, debido al movimiento de los electrones positivos, ejerce sobre los electrones de signo contrario y misma carga absoluta, dos acciones iguales y de signo contrario. Entonces, no se puede distinguir sin inconveniente el campo debido al movimiento de los electrones positivos y el debido al movimiento de los negativos, ni considerar la suma algebraica de estos dos campos. es decir, en el campo resultante.

En la nueva teoría es al contrario. La acción sobre los electrones positivos del campo electromagnético, debido a los electrones positivos, se hace según las leyes comunes. Lo mismo sucede en la acción sobre el campo de los electrones negativos, debida a ellos mismos. Consideremos ahora la acción del campo debido a los electrones positivos sobre los electrones negativos (o a la inversa). Seguirá aún las mismas leyes, pero con un *coeficiente diferente*. Cada electrón es más sensible al campo creado por los electrones de signo contrario que al campo creado por los electrones del mismo signo.

Tal es la hipótesis de Lorentz, que se reduce a la hipótesis de Franklin, a las débiles velocidades: dará cuenta entonces, para estas débiles velocidades, de la ley de Newton. Además, como la gravitación se reduce a las fuerzas de origen electrodinámico, la teoría de Lorentz se

le aplicará y por consiguiente el principio de la Relatividad no será violado.

Se ve que la ley de Newton no es más aplicable a las grandes velocidades y que debe ser modificada, para los cuerpos en movimiento, precisamente de la misma manera que las leyes de la Electroestática para la electricidad en movimiento.

Se sabe que las perturbaciones electromagnéticas se propagan con la velocidad de la luz. Estamos entonces tentados de rechazar la teoría precedente, recordando que la gravitación se propaga, según los cálculos de Laplace, al menos diez millones de veces más ligera que la luz y que, por consecuencia, no puede ser de origen electrodinámico. El resultado de Laplace es lo suficientemente conocido, pero se ignora generalmente la significación. Laplace suponía que si la propagación de la gravitación no es instantánea, su velocidad de propagación se combina con la del cuerpo atraído; pasa lo mismo para la luz en el fenómeno de la aberración astronómica, de tal manera que la fuerza efectiva no es dirigida según la recta que une los dos cuerpos, sino que hace con esta recta un pequeño ángulo. Es ésta una hipótesis totalmente particular, bastante mal justificada y en todo caso enteramente diferente de la de Lorentz. El resultado de Laplace no prueba nada contra la teoría de Lorentz.

II

COMPARACIÓN CON LAS OBSERVACIONES ASTRONÓMICAS

Las teorías precedentes, ¿pueden conciliarse con las observaciones astronómicas? Primero, si se las adopta, la energía de los movimientos planetarios será constantemente disipada por el efecto de la *onda de aceleración*.

De lo que resultará que los movimientos medios de estos astros irán constantemente acelerándose, como si estos

astros se moviesen en un medio resistente. Pero este efecto es excesivamente débil, mucho más para ser descubierto por las más preciosas observaciones. La aceleración de los cuerpos celestes es relativamente débil, de manera que los efectos de la onda de aceleración son despreciables y el movimiento puede ser mirado como casi estacionario. Es verdad que los efectos de la onda de aceleración van constantemente acumulándose, pero esta acumulación es tan lenta que serán precisos bastantes miles de años de observación para que llegue a ser sensible.

Hagamos entonces el cálculo considerando el movimiento como casi estacionario, y esto en las tres hipótesis siguientes:

A. Admitamos la hipótesis de Abraham (electrones indeformables) y conservemos la ley de Newton bajo su forma habitual.

B. Admitamos la hipótesis de Lorentz sobre la deformación de los electrones y conservemos la habitual ley de Newton.

C. Admitamos la hipótesis de Lorentz sobre los electrones y modifiquemos la ley de Newton, como lo hemos hecho en el párrafo precedente a fin de hacerla compatible con el principio de relatividad.

Es en el movimiento de Mercurio que el efecto es más sensible, puesto que este planeta es el que mayor velocidad posee. Tisserand hizo un cálculo análogo en otro tiempo, admitiendo la ley de Weber. Vuelvo a decir que Weber halló a la vez la explicación a los fenómenos electrostáticos y electrodinámicos, suponiendo que los electrones (para los cuales no se había inventado aún un nombre) ejercen los unos sobre los otros atracciones y repulsiones dirigidas según la recta que los une, dependiendo no solamente de sus distancias, sino de primeras y segundas derivadas de estas distancias, a consecuencia de sus velocidades y de sus aceleraciones. Esta ley de Weber, bastante diferente de las que tienden a prevalecer hoy, no presenta al menos con ella cierta analogía.

Tisserand halló que, si la atracción newtoniana se hacía conforme a la ley de Weber, resultaría para el perihelio

de Mercurio una variación secular de $14''$ en el mismo sentido que la que ha sido observada y no ha podido ser explicada, pero más pequeña, puesto que es de $38''$.

Volvamos a la hipótesis A, B y C, y estudiemos primero el movimiento de un planeta atraído por un centro fijo. La hipótesis B y C no se distinguen entonces más, puesto que, si el punto atraído es fijo, el campo que él produce es un campo exclusivamente electroestático, donde la atracción varía en razón inversa del cuadrado de las distancias conforme a la ley electroestática de Coulomb, idéntica a la de Newton.

La ecuación de las fuerzas vivas subsiste, tomando para la fuerza viva la definición nueva; lo mismo la ecuación de las áreas es reemplazada por otra equivalente; el momento de la cantidad de movimiento debe ser definido como se ha hecho en la nueva Dinámica.

El solo efecto sensible será un movimiento secular del perihelio. Con la teoría de Lorentz se encontrará para este movimiento la mitad de lo que dió la ley de Weber; con la teoría de Abraham los dos quintos.

Si se supone ahora dos cuerpos móviles gravitando alrededor de su centro de gravedad común, los efectos difieren muy poco, aunque los cálculos sean un poco más complicados. El movimiento del perihelio de Mercurio será entonces de $7''$ en la teoría de Lorentz y de $5''6$ en la de Abraham.

El efecto es, por otra parte, proporcional a $n^3 a^2$, siendo n el movimiento medio del astro y a el radio de su órbita. Para los planetas, en virtud de la ley de Kepler, el efecto varía entonces en razón inversa $\sqrt{a^3}$, es por lo tanto insensible menos para Mercurio.

Es insensible igualmente para la Luna, aunque n sea grande, puesto que a es extremadamente pequeña; en suma, es cinco veces más pequeño para Venus y seiscientas veces más pequeño para la Luna que para Mercurio. Agreguemos que en lo que concierne a Venus y a la Tierra el movimiento del perihelio (para una misma velocidad angular de este movimiento) sería mucho más difícil de descubrir por las observaciones astronómicas, puesto que

la excentricidad de las órbitas son mucho más débiles que para Mercurio.

En resumen, *el solo efecto sensible sobre las observaciones astronómicas sería un movimiento del perihelio de Mercurio, en el mismo sentido que él ha sido observado sin ser explicado, pero probablemente más débil.*

Esto no puede ser tomado como un argumento en favor de la nueva Dinámica, puesto que precisará encontrar siempre otra explicación para la parte más grande de la anomalía de Mercurio; pero esto menos puede ser tomado como un argumento contra ella.

III

LA TEORÍA DE LESAGE

Conviene aproximar estas consideraciones de una teoría propuesta después de largo tiempo para explicar la gravitación universal. Supongamos que en los espacios interplanetarios circulan en todos los sentidos con grandes velocidades corpúsculos muy débiles. Un cuerpo aislado en el espacio en apariencia no estará afectado por los choques de estos corpúsculos, puesto que estos choques se reparten por igual en todas las direcciones. Pero si dos cuerpos A y B están en presencia, el cuerpo B desempeñará el papel de pantalla, interceptará una parte de los corpúsculos que sin él habrían golpeado a A. Entonces los golpes recibidos por A en la dirección opuesta a la de B no tendrán contrapartida, o no serán compensados más que imperfectamente y colocarán a A sobre B.

Tal es la teoría de Lesage, que vamos a discutir colocándonos en el punto de vista de la Mecánica común. ¿Cómo antes que nada deben tener lugar los choques previstos por esta teoría? ¿Es según la ley de los cuerpos perfectamente elásticos, o según la de los cuerpos desprovistos de elasticidad, o según una ley intermediaria? Los corpúsculos de Lesage no pueden comportarse como cuer-

pos perfectamente elásticos; sin esto, el efecto sería nulo, puesto que los corpúsculos interceptados por el cuerpo B serían reemplazados por otros que habrían rebotado sobre B, y que el cálculo prueba que la compensación sería perfecta.

¿Es preciso entonces que el choque haga perder energía a los corpúsculos y esta energía deberá encontrarse bajo forma de calor? ¿Pero cuál será la cantidad de calor así producida? Observaremos que la atracción pasa a través de los cuerpos; es preciso entonces representarnos la Tierra, por ejemplo, no como una pantalla llena, sino como formada por un gran número de moléculas esféricas muy pequeñas que desempeñan individualmente el papel de pequeñas pantallas, pero entre las cuales pueden circular libremente los corpúsculos de Lesage. De esta manera, no solamente la Tierra no es una pantalla llena, ni un colador, puesto que los vacíos ocupan mucho más lugar que los llenos. Para darnos cuenta, recordemos que Laplace ha demostrado que la atracción, atravesando la Tierra, es debilitada en más de una diez millonésima y su demostración no deja nada que desear: si, en efecto, la atracción fuera absorbida por los cuerpos por los que atraviesa, no sería proporcional a las masas; sería relativamente más débil para los cuerpos gruesos que para los pequeños, puesto que tendría un espesor más grande que atravesar. La atracción del Sol sobre la Tierra sería entonces *relativamente* más débil que la del Sol sobre la Luna, de lo que resultaría en el movimiento de la Luna una desigualdad muy sensible. Debemos deducir entonces si adoptamos la teoría de Lesage, que la superficie total de las moléculas esféricas que componen la Tierra son más de la diez millonésima parte de la superficie total de la Tierra. Darwin ha demostrado que la teoría de Lesage no conduce exactamente a la ley Newton, sino suponiendo los corpúsculos enteramente desprovistos de elasticidad. La atracción ejercida por la Tierra sobre una masa 1 a la distancia 1 será entonces proporcional, a la vez, a la superficie total S de las moléculas esféricas que la componen, a la velocidad V de los corpúsculos, a la raíz cua-

drada de la densidad del medio formado por los corpúsculos. El calor producido será proporcional a S , a la densidad P y al cubo de la velocidad V .

Pero es preciso tener en cuenta la resistencia experimentada por un cuerpo que se mueve en medio semejante; no puede sin ciertos choques, huyendo por el contrario de los que vienen en la dirección opuesta, de manera que la comparación realizada en el estado de reposo no puede subsistir más. La resistencia calculada es proporcional a S , á ρ y á v . Según esto, se sabe que los cuerpos celestes se mueven como si no ofrecieran ninguna resistencia, y la precisión de las observaciones nos permite fijar un límite a la resistencia del medio.

Esta resistencia, variando como $S\rho v$, mientras que la atracción varía como $S\sqrt{\rho v}$, vemos que la relación de la resistencia al cuadrado de la atracción en razón inversa del producto $S v$.

Tenemos entonces un límite inferior del producto $S v$. Habiendo dejado un límite superior de S por la absorción de la atracción de los cuerpos que atraviesa, tenemos entonces un límite inferior de la velocidad v , que debe ser al menos igual a 24.10^{17} veces que el de la luz.

Podemos deducir ρ y la cantidad de calor producida; esta cantidad bastará para elevar la temperatura 10^{26} por segundo. La Tierra recibirá en un tiempo dado 10^{20} veces más calor que el Sol no emite en el mismo tiempo. No quiero hablar del calor que el Sol envía a la Tierra, sino del que irradia en todas las direcciones.

Es evidente que la Tierra no resistiría durante mucho tiempo un régimen parecido. No nos veríamos conducidos a resultados menos fantásticos si, contrariamente a las vistas de Darwin, se dotara a los corpúsculos de Lesage de una elasticidad imperfecta sin ser nula. En verdad, la fuerza viva de estos corpúsculos no será enteramente convertida en calor, pero la atracción producida será menor igualmente, de manera que será solamente la porción de esta fuerza viva convertida en calor la que contribuirá a producir la atracción, y ésta se tornaría lo mismo: un empleo juicioso del teorema de Viriel permitirá darse cuenta.

Se puede transformar la Teoría de Lesage; suprimamos los corpúsculos e imaginémosnos que el éter esté recorrido en todos los sentidos por ondas luminosas llegadas de todos los puntos del espacio. Cuando un objeto material recibe una onda luminosa, esta onda ejerce sobre él una acción mecánica debida a la presión Maxwel-Bartholi, lo mismo que si hubiese recibido el choque de un proyectil material. Las ondas en cuestión podrían entonces desempeñar el papel de corpúsculos de Lesage. Es esto lo que admite por ejemplo el Sr. Tomassina.

Las dificultades no están descartadas por esto; la velocidad de propagación no puede ser más que la de la luz, y se es así conducido por la resistencia del medio a una cifra inadmisibile. Por otra parte, si la luz se refleja integralmente, el defecto es nulo, de la misma manera en la hipótesis de los corpúsculos perfectamente elásticos. Para que haya atracción es preciso que la luz sea parcialmente absorbida; pero entonces hay producción de calor. Los cálculos no difieren esencialmente de los que se hacen en la teoría ordinaria de Lesage, y el resultado conserva el mismo carácter fantástico.

Por otra parte, la atracción no es absorbida por los cuerpos que atraviesa, donde apenas lo es; no sucede lo mismo con la luz que conocemos. La luz que produciría la atracción newtoniana debería ser considerablemente diferente de la luz ordinaria, y sería, por ejemplo, de muy corta longitud de onda. Sin contar que si nuestros ojos fueran sensibles a esta luz, el cielo entero debería parecernos más brillante que el Sol, de tal manera que el Sol nos parecería destacarse en negro, sin que el Sol nos rechazase en lugar de atraernos. Por todas estas razones, la luz que permitirá explicar la atracción debería aproximarse mucho más a los rayos X de Roentgen que a la luz común.

Aun los rayos X no bastarían; por penetrantes que nos parezcan, no podrían pasar a través de la Tierra; sería necesario imaginar entonces rayos X' mucho más penetrantes que los rayos X comunes. A continuación una porción de la energía de esos rayos X' debería ser destruída sin

que hubiera atracción. Si no se ve que ella es transformada en calor, lo que conduciría a una producción de calor enorme, es preciso admitir que es irradiada en todos los sentidos bajo forma de rayos secundarios, que se podrían llamar X'' y que deberían ser mucho más penetrantes aun que los rayos X' , sin que turbasen a su vez los fenómenos de atracción.

Tales son las hipótesis a que se es conducido cuando se quiere tomar la teoría de Lesage.

Pero todo esto que acabamos de decir supone las leyes comunes de la Mecánica. ¿Las cosas irán mejor si admitimos la nueva Dinámica? ¿Primero es posible conservar el Principio de la Relatividad? Demos primero a la teoría de Lesage su forma primitiva y supongamos el espacio surcado por corpúsculos materiales; si estos corpúsculos fueran perfectamente elásticos, las leyes de su choque estarían de acuerdo al Principio de Relatividad, pero sabemos que entonces su efecto sería nulo. Es preciso suponer entonces que estos corpúsculos no son elásticos. Entonces es difícil imaginar una ley de choque compatible con el Principio de Relatividad. Por otra parte, se encontraría aún una producción de calor considerable y no obstante una resistencia del medio muy sensible.

Si suprimimos los corpúsculos y volvemos a la hipótesis de Maxwell-Bartholi, no serán menores las dificultades. Es lo que ha tratado Lorentz mismo en su memoria en la Academia de Ciencias de Amsterdam, el 25 de abril de 1900.

Consideremos un sistema de electrones sumergido en un éter recorrido en todos los sentidos por ondas luminosas; uno de estos electrones golpeado por una de estas ondas, va a entrar en vibración; su vibración va a ser sincronizada con la de la luz; pero podría haber una diferencia de fase, si el electrón absorbe una parte de la energía incidente. Si en efecto absorbe la energía, es que es la vibración del éter la que *acarrea* el electrón; el electrón debe ser entonces retrasado sobre el éter. Un electrón en movimiento es entonces asimilable a una corriente de convención; entonces todo campo magnético, en particular

este que es debido a la misma perturbación luminosa, debe ejercer una acción mecánica sobre este electrón. Esta acción es muy débil, además cambia de signo en el período de la corriente; sin embargo, la acción media no es nula si hay una diferencia de fase entre las vibraciones del electrón y las del éter. La acción media es proporcional a esta diferencia, por lo tanto, a la energía absorbida por el electrón. No puedo entrar aquí en el detalle de los cálculos; digamos solamente que el resultado final es una atracción de dos electrones cualquiera, variando en razón inversa del cuadrado de las distancias y proporcional a la energía absorbida por los dos electrones.

No puede entonces haber atracción sin absorción de luz, y por consecuencia, sin producción de calor. Y es todo lo que ha determinado a Lorentz a abandonar esta teoría, que en el fondo no difiere de la de Lesage o Maxwell-Bartholi.

Se hubiera asustado mucho más si hubiera llevado el cálculo hasta el fin. Habría encontrado que la temperatura de la Tierra debería acrecentarse 10^{13} grados por segundo.

IV

CONCLUSIONES

Me he esforzado en dar en pocas palabras una idea tan completa como posible de estas nuevas doctrinas; he tratado de explicar cómo han tomado nacimiento, sin que el lector se asustara por su osadía. Las nuevas teorías no están aún demostradas, falta mucho; solamente se apoyan sobre un conjunto bastante serio de probabilidades, para que no tengamos el derecho de tratarlas con desprecio.

Las mismas experiencias nos enseñan sin duda en qué se debe pensar definitivamente. El nudo del problema está en la experiencia de Kaufman y las que se deberán tratar de ensayar para verificarla. Permítaseme un voto para terminar. Supongamos que de aquí a varios años estas

teorías sufrieran unas pruebas y triunfaran. Nuestra enseñanza secundaria correría entonces un gran peligro; algunos profesores querrían sin duda hacer lugar a las nuevas teorías. Las novedades son atrayentes y es tan duro parecer no haber avanzado bastante. Al menos se querrá abrir a los niños de unas ojeadas y antes de enseñarles la Mecánica común, se les advertirá que ya ha pasado su tiempo y que al menos es buena para el viejo zoquete de Laplace. Y entonces no se acostumbrarán a la Mecánica ordinaria. ¿Es bueno advertirles que no es más que aproximada? Sí, pero más tarde, cuando hayan penetrado hasta la medula, cuando hayan tomado el hábito de no pensar sino por ella, cuando no corran el riesgo de olvidarla, entonces se podrá sin inconveniente mostrarles los límites.

Es con la Mecánica común que deben vivir, es la sola que tendrán siempre que aplicar; cualquiera que sean los progresos del automovilismo, nuestros coches no alcanzarán jamás las velocidades donde ella no sea verdadera. La otra no es más que un lujo y no se debe pensar en lujo sino cuando no haya el riesgo de perjudicar lo necesario.

L I B R O C U A R T O

LA CIENCIA ASTRONÓMICA

CAPÍTULO I

LA VÍA LÁCTEA Y LA TEORÍA DE LOS GASES

Las consideraciones que voy a desarrollar aquí, han atraído poco, hasta ahora, la atención de los astrónomos. No podría citar apenas sino una idea ingeniosa de Lord Kelvin que nos ha abierto un nuevo campo de descubrimientos, pero que espera aún que se le siga. No tengo tampoco ningún resultado original que presentar, y todo lo que puedo hacer es dar una idea de los problemas que se plantean, pero que nadie hasta hoy se ha preocupado de resolver.

Todo el mundo sabe cómo interpretan muchos físicos modernos la constitución de los gases. Los gases están formados por una multitud innumerable de moléculas, las que, dotadas de grandes velocidades, se cruzan y entrecruzan en todos los sentidos. Estas moléculas obran probablemente a distancia unas de las otras, pero esta acción disminuye muy rápidamente con la distancia, de manera que sus trayectorias permanecen sensiblemente rectilíneas y no cesan de serlo sino cuando dos moléculas llegan a pasar bastante cerca una de la otra. En este caso, su mutua atracción o repulsión las hace desviarse a derecha o izquierda. Es lo que se denomina algunas veces un choque, pero no se debe interpretar esta palabra choque en sentido absoluto; no es necesario que las dos moléculas lleguen a estar en contacto, basta que se aproximen lo

bastante para que sus atracciones mutuas sean sensibles. Las leyes de la desviación que sufren son las mismas que si hubiera habido el choque verdadero.

Primero parece que los innumerables choques de esta innumerable polvareda no pueden engendrar más que un caos inextricable, ante el cual el analítico deberá retroceder. Pero la ley de los grandes números, esa ley suprema del azar, acude en nuestra ayuda, en presencia de un medio desorden. Esta ley estadística restablece una especie de orden intermedio, donde el espíritu puede recobrarse. Es el estudio de este orden intermedio lo que constituye la teoría cinética de los gases; nos muestra que las velocidades de las moléculas son igualmente repartidas en todas direcciones, que el grado de estas velocidades varía de una molécula a la otra, pero que esta misma variación está sometida a una ley llamada ley de Maxwell. Esta ley nos enseña cuántas moléculas hay animadas de tal o cual velocidad. En cuanto los gases se apartan de esta ley, los choques mutuos de las moléculas al modificar el grado y dirección de sus velocidades, tienden a hacerlo volver rápidamente a la ley antes mencionada. Los físicos han tratado con éxito de explicar de esta manera las propiedades experimentales de los gases, por ejemplo la ley de Mariotte.

Consideremos ahora la Vía Láctea, allí también vemos una innumerable polvareda, sólo que los granos de esta polvareda no son átomos, son astros, estos granos se mueven también con grandes velocidades, obran a distancia unos sobre los otros, pero esta acción es tan débil a gran distancia, que sus trayectorias son rectilíneas, y sin embargo de tanto en tanto dos de entre ellos pueden aproximarse lo bastante como para ser desviados de sus rectas, como un cometa que ha pasado muy cerca de Júpiter. En una palabra, para un gigante, la Vía Láctea no sería sino una burbuja de gas.

Tal ha sido la idea directriz de lord Kelvin. ¿Qué podemos sacar de esta comparación? ¿En qué medida es exacta? Es lo que parece que vamos a buscar, pero antes de llegar a una conclusión definitiva y sin querer prejuz-

garla, presentimos que la teoría cinética de los gases ha de ser para el astrónomo un modelo que no debería seguir ciegamente, sino en el que podrá inspirarse útilmente. Hasta el presente, la mecánica celeste no ha acatado más que al sistema solar, o a varios sistemas de estrellas dobles. Delante de este conjunto presentado por la Vía Láctea o los montones de estrellas, o las nebulosas resolubles, retrocede, puesto que no ve más que el caos. Pero la Vía Láctea no es más complicada que un gas, los métodos estadísticos fundados sobre el cálculo de las probabilidades aplicables a aquél lo serán también para ella. Antes que nada conviene darse cuenta del parecido de las dos cosas y de su diferencia.

Lord Kelvin se ha esforzado en determinar por este medio las dimensiones de la Vía Láctea, se ha limitado para esto a contar las estrellas visibles en nuestros telescopios, pero no estamos seguros de que detrás de las estrellas que vemos no hay otras que no veamos, de manera que lo que mediremos de esta manera no será la extensión de la Vía Láctea, será el alcance de nuestros instrumentos. La nueva teoría nos va a ofrecer otros recursos. En efecto, conocemos los movimientos de las estrellas más cercanas y podemos darnos una idea de la grandeza y dirección de sus velocidades. Si las ideas expuestas antes son exactas, estas velocidades deberán seguir la ley de Maxwell y su valor medio nos hará conocer, por así decir, lo que corresponde a la temperatura de nuestro gas ficticio. Pero esta misma temperatura depende de las dimensiones de nuestra burbuja gaseosa. ¿Cómo va a comportarse, en efecto, una masa gaseosa abandonada en el vacío si sus elementos se atraen según la ley de Newton? Va a tomar la forma esférica, además a consecuencia de la gravitación, la densidad va a ser más grande en el centro, la temperatura y la presión estando unida por dicha ley adiabática, como sucede en las capas sucesivas de nuestra atmósfera. En la misma superficie la presión será nula y será lo mismo de la temperatura absoluta, es decir, de la velocidad de las moléculas.

Una cuestión se plantea aquí: he hablado de la ley adia-

bática, pero esta ley no es la misma para todos los gases, puesto que depende de la relación de sus dos valores específicos; para el aire y los gases análogos esta relación es de 1,42; ¿pero es el aire que convendría asimilar la Vía Láctea? Evidentemente, no; debería ser considerado como un gas monoatómico, como el vapor de mercurio, como el argón, como el helio, es decir, que la relación de calores específicos debía ser tomada igual a 1,66. Y, en efecto, una de nuestras moléculas sería por ejemplo el sistema solar; jero los planetas son pequeños personajes, solamente cuenta el sol, de manera que nuestra molécula es monoatómica. Lo mismo si tomamos una estrella doble, es probable que la acción de un astro extraño que llegue a aproximarse, llegaría a ser lo bastante sensible para desviar el movimiento de traslación general del sistema antes de ser capaz de turbar las dos órbitas relativas de dos componentes; la estrella doble, en una palabra, se comportaría como un átomo indivisible.

Cualquiera que fuera la presión y por consiguiente la temperatura en el centro de la esfera, serían tanto más grandes cuanto más grosera fuera la esfera, puesto que la presión aumenta de peso en todas las capas superpuestas. Podemos suponer que estamos en el centro de la Vía Láctea y observando la velocidad media de las estrellas, conoceremos lo que corresponde a la temperatura central de nuestra esfera gaseosa y determinaremos su radio.

Podemos darnos una idea del resultado por las consideraciones siguientes: hagamos una hipótesis más simple: la Vía Láctea es esférica, y las masas están repartidas en una manera homogénea, de lo que resulta que los astros describen elipses teniendo el mismo centro. Si suponemos que la velocidad se anula en la superficie podemos calcular esta ecuación en el centro por la ecuación de las fuerzas vivas. Encontraremos así que esta velocidad es proporcional al radio de la esfera y a la raíz cuadrada de su densidad. Si la masa de esta esfera fuera la del Sol y su radio el de la órbita terrestre, esta velocidad sería (es fácil verlo) la de la Tierra sobre su órbita. Pero en el caso que hemos expuesto, la masa del Sol deberá ser

repartida en una esfera de radio 1.000.000 de veces más grande, siendo este radio la distancia de las estrellas más cercanas. La densidad es entonces 10^{18} veces más pequeña, según esto las velocidades son del mismo orden, entonces es preciso que el radio sea 10^9 más grande, sea mil veces la distancia de las estrellas más cercanas, lo que hará cerca de un millón de millones de estrellas en la Vía Láctea.

Pero vais a decir que estas hipótesis se apartan mucho de la realidad, primero la Vía Láctea no es esférica y vamos a volver pronto sobre este punto; a continuación la teoría cinética de los gases no es compatible con la hipótesis de una esfera homogénea. Pero haciendo el cálculo exacto conforme a esta teoría, se encontrará un resultado diferente, sin duda, pero del mismo orden de grandeza; según esto, en un problema parecido los datos son tan inciertos que la sola meta que podemos ver es el orden de grandeza.

Aquí se presenta una primera observación: el resultado de lord Kelvin que acabo de volver a encontrar por medio de un cálculo aproximado, concuerda sensiblemente con las evaluaciones que los observadores han podido hacer con sus telescopios, de manera que sería preciso deducir que estamos cerca de horadar la Vía Láctea. Pero esto nos permite resolver otra cuestión. Existen las estrellas que vemos porque brillan. ¿Pero no podría haber astros oscuros que circularasen en los espacios interestelares, cuya existencia podría permanecer largo tiempo ignorada? Pero entonces lo que nos dará el método de lord Kelvin será el número total de las estrellas, comprendiendo las estrellas oscuras como su cifra es comparable a la que da el telescopio, es por lo que no hay materia oscura o por lo menos que no hay tanta como materia brillante.

Antes de ir más lejos debemos encarar el problema bajo otro aspecto. ¿La Vía Láctea así constituida es la imagen de un gas propiamente dicho? Se sabe que Crookes ha introducido la noción de un cuarto estado de la materia en que los gases demasiado rarificados no son más verdaderos gases y se tornan en lo que se llama la materia ra-

diente. La Vía Láctea, vista la debilidad de su densidad, ¿será la imagen de la materia gaseosa, o la de la materia radiante? Será esto lo que se llama *el libre recorrido* lo que nos proveerá la respuesta.

La trayectoria de una molécula gaseosa puede ser considerada como formada por segmentos rectilíneos enlazados por arcos muy pequeños correspondientes a choques sucesivos. La longitud de cada uno de estos segmentos es lo que se llama el *libre recorrido*; esta longitud no es la misma, entendámoslo bien, para todos los segmentos y para todas las moléculas; pero se puede tomar una longitud media, es esto lo que se llama el *recorrido medio*. Esto es por lo tanto más grande que la densidad del gas y más débil. La materia será radiante si el recorrido es más grande que las dimensiones del vaso donde el gas está encerrado, de manera que una molécula tiene probabilidad de recorrer el vaso entero sin sufrir choque, permanece gaseosa en el caso contrario. Resulta de esto que un mismo fluido puede ser radiante en un pequeño vaso y gaseoso en uno grande; es por esto que puede ser que en el tubo de Crookes es necesario hacer el vacío tanto más cuanto el vaso sea más grande.

¿Qué sucede entonces para la Vía Láctea? Esta es una masa de gas cuya densidad es muy débil, pero cuyas dimensiones son muy grandes. ¿Una estrella tiene probabilidad de atravesarla sin sufrir choque, sin pasar bastante cerca de otra estrella, como para ser sensiblemente desviada de su ruta? ¿Qué entenderemos por *bastante cerca*? Esto es forzosamente un poco arbitrario; supongamos que sea la distancia del Sol a Neptuno lo que representa una desviación de una docena de grados; supongamos entonces alguna de nuestras estrellas envuelta en una esfera de guardia de este radio, ¿una recta podría pasar entre estas dos esferas? A la distancia media de las estrellas de la Vía Láctea el radio de estas esferas será visto bajo un ángulo de cerca de un décimo de segundo y tendremos mil millones de estrellas. Coloquemos bajo la esfera celeste mil millones de pequeños círculos de un décimo de segundo de radio. ¿Tenemos probabilidades

para que estos círculos recubran un gran número de veces la esfera celeste? Lejos de ahí, no recubrirán más que la dieciséis milésima parte. De esta manera la Vía Láctea no es la imagen de la materia gaseosa, sino la de la materia radiante de Crookes. Sin embargo, como nuestras conclusiones precedentes son felizmente muy precisas, no tenemos que modificarlas sensiblemente. Pero hay otra dificultad; la Vía Láctea no es esférica, y hasta aquí hemos razonado como si lo fuera, puesto que es esta la forma de equilibrio que tomaría un gas aislado en el espacio.

Existen en desquite muchas estrellas cuya forma es globular y a las cuales se aplicará mejor lo que acabamos de decir hasta aquí. Herschel se ha preocupado ya de explicar sus notables apariencias. Suponía qué conglomerado de estrellas estaban uniformemente distribuidas, de tal manera que un montón era una esfera homogénea; cada estrella describirá entonces una elipse y todas estas órbitas serían recorridas en el mismo tiempo de manera que al término de un período de conglomerados volvería a encontrar su configuración primitiva y esta configuración sería estable. Desgraciadamente los conglomerados no parecen homogéneos, se observa una condensación en el centro, se observaría lo mismo aún cuando la esfera fuera homogénea, puesto que es más espesa en el centro, pero no sería tan acentuada. Se puede entonces por otra parte comparar un conglomerado a un gas en equilibrio de una masa gaseosa.

Pero dirán ustedes que estos conglomerados son mucho más pequeños que la Vía Láctea de la cual forman parte probablemente y aunque sean más densos nos darán, por otra parte, cualquier cosa análoga a la de la materia radiante; según esto, los gases no alcanzan su equilibrio adiabático sino a consecuencia de los innumerables choques de la moléculas. Puede ser que hubiera medio de arreglar esto. Supongamos que las estrellas de los conglomerados tengan justa la energía suficiente para que su velocidad se anule cuando lleguen a la superficie, entonces volverán atrás y lo atravesarán de nuevo; después de un gran número de travesías acabarán por ser

desviadas por un choque, en estas condiciones tendríamos aún una materia que se podría considerar gaseosa; si por azar hubiera habido en los conglomerados de estrellas, cuya velocidad fuese más grande, han salido desde hace tiempo, la han dejado para no volver. Por todas estas razones sería interesante examinar los conglomerados conocidos y tratar de darse cuenta de la ley de las densidades y ver si es la ley adiabática de los gases.

Pero volvamos a la Vía Láctea, no es esférica y se la representará más bien como un disco aplastado. Claro es que una masa salida sin velocidad de la superficie llegará al centro con velocidades diferentes; según que haya salido de la superficie, en la vecindad del centro del disco o del borde del mismo, la velocidad será notablemente más grande en el último caso.

Según esto, hasta el presente hemos admitido que las velocidades propias de las estrellas, las que observamos, deben ser comparables a las que alcanzarán masas parecidas; esto entraña una cierta confusión. Hemos dado antes un valor para las dimensiones de la Vía Láctea y hemos deducido las velocidades propias observadas, que son del mismo orden que la de la Tierra sobre la órbita; ¿pero cuál es la dimensión que hemos medido de esta manera? ¿Es el espesor? ¿Es el radio del disco? Es, sin duda, algo intermedio. ¿Pero qué podemos decir del espesor mismo, o del radio del disco? No faltan los datos para hacer el cálculo, me limito a haceros entrever la posibilidad de fundar al menos una evaluación aproximada sobre una discusión profundizada de los movimientos propios.

Y entonces nos encontramos en presencia de dos hipótesis, o las estrellas de la Vía Láctea están animadas de velocidades que en su mayoría son paralelas al plano galáctico, pero por otra parte distribuidas uniformemente en todos los sentidos paralelamente a este plano. Si es de esta manera, la observación de los movimientos propios debe revelarnos una preponderancia de componentes paralelos a la Vía Láctea; está por ver, porque no sé si se ha hecho una discusión sistemática sobre este punto de

vista. Por otra parte, un equilibrio parecido no podrá ser más que provisorio, porque a consecuencia de los choques, las moléculas, quiero decir los astros, van a adquirir a la larga notables velocidades en el sentido perpendicular a la Vía Láctea y acabarán por salirse de su plano, de manera que el sistema tenderá hacia la forma esférica, única figura de equilibrio de una masa gaseosa aislada.

O el sistema entero está animado de una rotación común, y es por esta razón que está aplastado como la Tierra, como Júpiter, como todos los cuerpos que giran. Únicamente como este aplastamiento es considerable, es preciso que la rotación sea rápida, rápida sin duda, pero es preciso entenderla bajo el sentido de esta palabra. La densidad de la Vía Láctea es $10''$ veces más débil que la del Sol; una velocidad de rotación que sea $\sqrt{10^{22}}$ más pequeña que la del Sol, será entonces equivalente al punto de vista del aplastamiento una velocidad 10^{17} , más lenta que la de la Tierra es un treintavo de segundo de arco por siglo, será una rotación muy rápida, casi tan rápida como para que el equilibrio estable sea posible.

En esta hipótesis los movimientos propios que se pueden observar nos parecerían uniformemente distribuidos y no habría más preponderancia para los componentes paralelos al plano galáctico. No nos enseñarán nada sobre la rotación misma, puesto que formaríamos parte del sistema rotario. Si las nebulosas espirales son otras Vías Lácteas, extrañas a las nuestras, no serían acarreadas en esta rotación y se podrían estudiar sus movimientos propios. Es verdad que están muy alejadas, si una nebulosa de las dimensiones de la Vía Láctea, y si su radio aparente es por ejemplo $20''$, su distancia es diez mil veces el radio de la Vía Láctea.

Pero esto no hace nada, puesto que no es sobre la translación de nuestro sistema que les pedimos informes, sino sobre su rotación. Las estrellas fijas, por su movimiento aparente, nos revelan bien la rotación diurna de la Tierra aunque su distancia sea inmensa. Desgraciadamente la posible rotación de la Vía Láctea, por rápida que sea, es relativamente lenta desde el punto de vista absoluto y, por

otra parte, los enfoques ópticos sobre las nebulosas no pueden ser muy precisos; es necesario entonces miles de años de observaciones para aprender cualquier cosa.

Sea lo que fuere en esta segunda hipótesis, la figura de la Vía Láctea sería una figura de equilibrio definitivo.

No discutiría más el valor relativo de estas dos hipótesis, puesto que hay una tercera que puede ser más verosímil. Se sabe que entre las nebulosas insolubles se pueden distinguir varias familias: las nebulosas irregulares como la de Orión, las nebulosas planetarias y anulares, y las nebulosas espirales. Los espectros de las dos primeras familias han sido determinados, son discontinuos: estas nebulosas no son las formadas de estrellas; por otra parte, su distribución sobre el cielo parece depender de la Vía Láctea, sea que tenga tendencia a alejarse, sea por el contrario a aproximarse, forman entonces parte del sistema. Por el contrario, las nebulosas espirales son generalmente consideradas como independientes de la Vía Láctea, se admite que están formadas de una multitud de estrellas, que son, en una palabra, otras Vías Lácteas muy alejadas de la nuestra. Los recientes trabajos de Stratonof tienden a hacernos mirar la Vía Láctea misma como una nebulosa espiral, y es esta la tercera hipótesis de que quiero hablaros.

¿Cómo explicar las apariencias tan singulares presentadas por las nebulosas espirales, que son demasiado regulares y constantes para ser debidas al azar? Basta primero poner los ojos en una de estas imágenes para ver que la masa está en rotación; lo mismo se puede ver cuál es el sentido de la rotación, todos los radios espirales están curvados en el mismo sentido; es evidente que el *ala en marcha* la que está en retraso sobre el *pivote*, y esto determina el sentido de la rotación. Pero no es esto todo, es claro que estas nebulosas no pueden ser asimiladas a un gas en reposo, ni lo mismo a un gas en relativo equilibrio bajo el imperio de una rotación uniforme, es preciso compararlas a un gas en permanente movimiento en el cual reinan corrientes intestinas.

Supongamos, por ejemplo, que la rotación del núcleo

central sea rápida (ustedes saben lo que entiendo por esta palabra), tan rápida como para el equilibrio estable, entonces en el Ecuador la fuerza centrífuga prevalecería sobre la atracción y las estrellas tenderán a evadirse por el Ecuador y formarán corrientes divergentes; pero alejándose, como su movimiento de rotación permanece constante y el radio vector aumenta, su velocidad angular va a disminuir y es por esto que el *ala en marcha* parece retrasada.

Desde este punto de vista no habría un verdadero movimiento permanente, el núcleo central perdería constantemente materia, que se iría para no volver y se vaciaría progresivamente. Pero podemos no modificar la hipótesis. A medida que se aleje la estrella pierde su velocidad y acaba por pararse, en este movimiento la atracción la vuelve a tomar de nuevo y la vuelve sobre el núcleo; habrá entonces corrientes centrípetas. Es preciso admitir que las corrientes centrípetas están en primera fila y las centrífugas en segunda, si volvemos a tomar la comparación con una tropa en ejercicio que ejecuta una maniobra, y en efecto es preciso que la fuerza centrífuga compuesta sea compensada por la atracción ejercida por las capas centrales del enjambre sobre las capas extremas.

Por otra parte, al cabo de cierto tiempo se establece un régimen permanente, el enjambre se ha curvado, la atracción ejercida sobre el pivote por el ala en marcha tiende a frenar el pivote, y la del pivote sobre el ala en marcha tiende a acelerar la marcha de este ala que no aumenta su retraso, de manera que todos los radios acaban con una velocidad uniforme.

Se puede admitir, sin embargo, que la rotación del núcleo es más rápida que la de los radios.

Subsiste una cuestión; ¿por qué estos enjambres centrípetos y centrífugos tienden a concentrarse en radios, en lugar de diseminarse un poco por todas partes? ¿Por qué estos radios se reparten regularmente? Si los enjambres se concentran es a causa de la atracción ejercida por los ya existentes sobre las estrellas que salen del núcleo en su vecindad. Desde que una desigualdad se produce, tiende a acentuarse por esta causa.

¿Por qué se reparten regularmente los radios? Esto es delicado. Supongamos que no hay rotación, que todos los astros están en dos planos de manera que su distribución sea simétrica con relación a estos dos planos. Por simetría no habrá razón para que ellos salgan de estos dos planos, ni para que la simetría se altere. Esta configuración nos dará entonces el equilibrio que *será un equilibrio inestable*.

Si hay rotación, por el contrario, encontraremos una configuración de equilibrio análoga, con cuatro radios curvados, iguales entre ellos y cortándose a 90° ; y si la rotación es bastante rápida, este equilibrio podrá ser estable.

No estoy en estado de precisar más, me basta haceros entrever que estas formas espirales puede ser que pudiesen ser explicadas un día, no haciendo intervenir más que la ley de la gravitación y las consideraciones estadísticas recordando las de la teoría de los gases.

Esto que acabo de deciros sobre corrientes intestinas os muestra que podría haber interés en discutir sistemáticamente el conjunto de movimientos propios; esto es lo que podremos hacer dentro de un centenar de años cuando se haga la segunda edición de la carta del cielo y se la compare con la primera, es decir, a la que estamos haciendo ahora.

Pero quisiera, para terminar, llamar vuestra atención sobre un problema, el de la edad de la Vía Láctea o de las nebulosas. Si esto que hemos creído ver llega a confirmarse, podríamos darnos una idea. Esta especie de equilibrio estadístico cuyos gases nos dan el modelo no puede establecerse sino como consecuencia de un gran número de choques. Si estos choques son raros, no podrá producirse sino después de largo tiempo, si realmente la Vía Láctea (o al menos los montones que hacen parte), si las nebulosas han alcanzado este equilibrio es que son muy viejas y tendremos un límite inferior de su edad.

Tendremos igualmente un límite superior, este equilibrio no es definitivo y no podría durar siempre. Nuestras nebulosas espirales serían asimilables a los gases

animados de movimientos permanentes, pero los gases en movimiento son viscosos y sus velocidades acabarán por usarse. Lo que corresponde aquí a la viscosidad (y que depende de las probabilidades de choque de las moléculas) es excesivamente débil, de manera que el régimen actual podrá persistir durante un tiempo extremadamente largo, no obstante siempre de manera que nuestras Vías Lácteas no podrían vivir eternamente ni llegar a ser infinitamente viejas.

Y no es esto todo. Consideremos nuestra atmósfera: en la superficie debe reinar una temperatura infinitamente pequeña y la velocidad de las moléculas es cercana a cero. Pero no se trata sino de la velocidad media. Por consecuencia de los choques una de estas moléculas podrá adquirir (rara vez es verdad) una velocidad enorme y entonces va a salir de la atmósfera; una vez fuera no entrará más; nuestra atmósfera se vacía así entonces con extremada lentitud. La Vía Láctea va también perdiendo de tiempo en tiempo una estrella por el mismo mecanismo y esto limita igualmente su duración.

Y bien, es cierto que si suputamos así la edad de la Vía Láctea vamos a encontrar cifras enormes. Pero aquí se presenta una dificultad. Ciertos físicos se fundan en otras consideraciones, estiman que los soles no pueden tener sino una existencia efímera, cerca de cincuenta millones de años, nuestro mínimo será más grande que esto. ¿Hace falta creer que la evolución de la Vía Láctea ha comenzado cuando la materia era aún oscura? ¿Pero cómo las estrellas que la componen han llegado todas al mismo tiempo a la edad adulta, edad que debe durar tan poco? ¿O deben llegar todas sucesivamente y estas que vemos no son más que una débil minoría, según estas que están apagadas o que alumbrarán un día? ¿Pero cómo conciliar esto que hemos dicho antes sobre la ausencia de materia oscura en notable proporción? ¿Debemos abandonar una de las dos hipótesis? ¿Pero cuál? Me limito a señalar la dificultad sin pretender resolverla. Terminaré entonces con un gran punto de interrogación. Es interesante plantearse problemas aunque la solución parezca lejana.

CAPÍTULO II

LA GEODESIA FRANCESA

Todo el mundo comprende qué interés tenemos en conocer la forma y dimensiones de nuestro globo, pero puede ser que algunas personas se sorprendan al saber la precisión que se busca. ¿Es esto un lujo inútil? ¿Para qué sirven los esfuerzos que constantemente le han dispensado los geodestas?

Si se le planteara esta pregunta a un parlamentario contestaría: «Creo que es una de las Ciencias más útiles, puesto que es una de las que nos cuestan más caro». Quisiera tratar de daros una respuesta un poco más precisa.

Los grandes trabajos de arte, tanto los de la paz como los de la guerra, no pueden ser emprendidos sin largos estudios que economizan muchos tanteos, desengaños y frases inútiles. Estos estudios no pueden hacerse sino sobre una buena carta. Pero una carta no será más que una fantasía sin ningún valor si se la construye sin apoyarla sobre una estructura lo bastante sólida. Lo mismo sería tratar de poner de pie un cuerpo humano al que se le hubiera sacado el esqueleto.

Según esto son las medidas geodésicas las que nos dan esta estructura; entonces sin Geodesia no hay carta buena, y sin una buena carta no hay grandes trabajos públicos.

Estas razones bastarían, sin duda, para justificar los gastos, pero son propias para convencer hombres prácticos. No es sobre éstas que conviene insistir aquí; hay

otras más altas y desde todo punto de vista más importantes.

Plantaremos entonces la cuestión de otra manera: ¿La Geodesia puede ayudarnos a comprender mejor la Naturaleza? ¿Nos ha hecho comprender la unidad y la armonía? Un hecho aislado, un efecto, tiene poco precio y las conquistas de la Ciencia no tienen valor si no preparan otras nuevas.

Si se descubriera una pequeña joroba sobre el elipsoide terrestre, este descubrimiento no tendría gran interés. Se tornará precioso, por el contrario, si buscando la causa de esta joroba tenemos la esperanza de resolver otros secretos.

Pues bien, cuando en el siglo XVIII Maupertuis y La Condamine afrontaron diversos climas, no fué solamente para conocer la forma de nuestro planeta, se trataba del sistema del mundo entero.

Si la Tierra estuviera aplastada, Newton triunfaría y con él la doctrina de la gravitación y toda la Mecánica celeste moderna.

Y hoy, siglo y medio después de la victoria de los particulares de Newton, ¿creemos que la Geodesia no tiene nada que enseñarnos?

No sabemos qué es lo que hay en el interior del globo. Los pozos de las minas y los sondajes han podido hacernos conocer una capa de uno o dos kilómetros de espesor, es decir, la milésima parte de la masa total, ¿pero qué hay debajo?

De todos los extraordinarios viajes soñados por Julio Verne, puede que sea el viaje al centro de la tierra el que nos haya conducido a las regiones más inexploradas.

Pero estas profundas rocas que no podemos alcanzar ejercen a lo lejos su atracción que obra sobre el péndulo y deforma es esferoide terrestre. La Geodesia entonces puede calcularse de lejos, por decir así, e informarnos sobre su repartición. Nos hará ver así estas misteriosas regiones que Julio Verne no nos ha mostrado más que en su imaginación.

Esto no es un sueño hueco. El señor Faye, comparando

todas las medidas, ha llegado a un resultado verdaderamente sorprendente. Bajo los océanos hay en sus profundidades rocas de una gran densidad; bajo los continentes, por el contrario, hay vacíos.

Puede que las nuevas observaciones modifiquen estas conclusiones en sus detalles.

Nuestro venerado decano nos ha mostrado en todos los casos de qué lado hace falta buscar y lo que el geodesta puede enseñar al geólogo, interesado en conocer la constitución de la Tierra y también al pensador que desea especular sobre el pasado y el origen de este planeta.

Ahora, ¿por qué he titulado este capítulo la *Geodesia francesa*? Es que en cada país esta Ciencia ha tomado, puede ser más que todas las otras, un carácter nacional. Es fácil darse cuenta de la razón.

Es preciso que haya rivalidades. Las rivalidades científicas son siempre corteses o por lo menos casi siempre lo son; en todo caso son necesarias, puesto que siempre son fecundas.

Pues bien, en estas empresas que exigen de por sí largos esfuerzos y tantos colaboradores, el individuo se desvanece a pesar de él; bien entendido, ninguno tiene el derecho a decir: esta es mi obra. No es entonces entre los hombres que se ejercen estas rivalidades, sino entre las naciones.

De esta manera vamos a buscar cuál ha sido la parte de Francia. Creo que tenemos el derecho de estar orgullosos.

A principio del siglo XVIII se iniciaron grandes polémicas entre los newtonianos que creían que la Tierra era achatada, como lo exige la teoría de la gravitación de Cassini, que equivocado por medidas inexactas creía que nuestro globo era alargado. Sólo la observación directa podría zanjar la cuestión. Y fué nuestra Academia de Ciencias quien emprendió esta tarea gigantesca para su época.

Mientras que Maupertuis y Clairaut medían un grado de meridiano bajo el círculo polar, Bouguer y La Condamine se dirigían sobre las montañas de los Andes, a las

entonces sometidas regiones a España, y que forman hoy la República del Ecuador.

Nuestros misioneros se exponían a grandes fatigas. Los viajes no eran tan fáciles como lo son hoy.

Cierto es que el país en que trabajaba Maupertuis no era más que un desierto y experimentó, según se dice entre los lapones, estas dulces satisfacciones del corazón que los verdaderos navegantes árticos no conocen. Está muy cerca la región donde en nuestros días transatlánticos transportan cada verano caravanas de turistas y jóvenes ingleses.

Pero en aquel tiempo no existía la agencia Cook, y Maupertuis creía de buena fe haber hecho una expedición polar; puede ser que no estuviera totalmente errado. Los rusos y los suecos prosiguen hoy análogas medidas en Spitzberg en un país donde hay verdaderos bancos de hielo. Pero tienen otros recursos y la diferencia de tiempo compensa bastante bien la de latitudes. El nombre de Maupertuis nos ha llegado fuertemente arañado por las uñas del doctor Akakia; el sabio había tenido la desgracia de haber desagradado a Voltaire, que era entonces el rey del espíritu. Se enorgulleció de ello al principio, pero las lisonjas de los reyes son tan terribles como su desgracia, porque los mañanas son terribles. Voltaire supo alguna cosa él mismo de ello.

Voltaire llamó a Maupertuis mi amable maestro pensador, marqués del círculo polar, querido aplastador del mundo y de Cassini, y la lisonja suprema sir Isaac Maupertuis, le escribió: «No hay más que el rey de Prusia que yo ponga al nivel con usted, no le falta más que ser geómetra». Pero pronto la escena cambia, no habla más de divinizarlo, como en otro tiempo los argonautas, o hacer descender del Olimpo el consejo de los dioses para contemplar sus trabajos, sino de encadenarlo en un asilo de locos. No habla más de su espíritu sublime, sino de su despótico orgullo, provisto de muy poca Ciencia y mucho de ridículo. No quiero referir estas luchas heroicómicas; permítidme, no obstante, algunas reflexiones sobre dos versos

de Voltaire. En su *Discurso sobre la moderación* (no se trata de la moderación en los elogios y en las críticas), el poeta escribió:

*Vous avez confirmé dans des lieux pleins d'ennui
Ce que Newton connut sans sortir de chez lui.* (1)

Estos dos versos que reemplazan las hiperbólicas alabanzas de la primera hora, son demasiado injustos y, sin ninguna duda, Voltaire estaba lo suficientemente ilustrado para comprenderlo.

Entonces no se estimaban más que los descubrimientos que se podían hacer sin salir de casa.

Hoy en día será, sin embargo, de la teoría que se hará poco caso. Esto es desconocer el fin de la Ciencia.

¿La Naturaleza está gobernada por el capricho o reina la armonía? He aquí la cuestión. La Ciencia es bella cuando nos revela esta armonía y por eso digna de ser cultivada. ¿Pero de dónde puede venirnos esta revelación sino del acuerdo de la teoría con la experiencia? Buscar si este acuerdo ha tenido lugar o ha hecho falta es nuestro fin. Desde luego, estos dos términos, que debemos comparar, son tan indispensables el uno como el otro. Despreciar el uno por el otro sería un contrasentido. Aislados, la teoría sería hueca, la experiencia sería miope; los dos serían inútiles y carecerían de interés.

Maupertuis tiene derecho a su parte de gloria. Ciertamente, no valdría la de Newton que recibió la chispa divina, ni la de su colaborador Clairaut. No es menospreciable, sin embargo, puesto que su obra fué necesaria y si Francia, adelantada por Inglaterra en el siglo XVII, en el siguiente se ha tomado el desquite, no es solamente debido al genio de los Clairaut, los Alembert, los Laplace, que lo debe, es también a la larga paciencia de los Maupertuis y los La Condamine.

Llegamos a lo que se puede llamar el segundo período

(1) Confirmasteis en desagradables comarcas

Lo que Newton concibió sin salir de su casa.

heroico de la Geodesia; Francia es desgarrada en el interior. Toda Europa esta armada contra ella, parecería que todas estas luchas gigantescas absorbiesen todas sus fuerzas. Lejos de ahí. Le quedan aún para servir a la Ciencia. Los hombres de aquel entonces no retrocedían ante ninguna empresa; eran hombre de fe.

Delambre y Mechain fueron encargados de medir un arco que iba de Dunkerque a Barcelona. No se va esta vez a Laponia o a Perú; las escuadras enemigas nos cerrarían los caminos. Pero si las expediciones son menos lejanas, la época es tan confusa, que los obstáculos, los peligros son con todo muy grandes.

En Francia, Delambre tenía que luchar contra la mala voluntad de los municipios recelosos. Se sabe que los campanarios que se ven de lejos, y que se pueden apuntar con precisión, sirven frecuentemente de señal a los geodestas. Pero en el país que Delambre atravesaba no había campanarios. No sé qué procónsul había pasado por allá que se enorgullecía de haber hecho tumbar todos los campanarios que se elevaban orgullosamente por encima de la humilde morada de los sans-culottes ⁽¹⁾.

Se levantaron entonces pirámides de tablas que se recubrían de tela blanca para tornarlas más visibles. Esto era otra cosa: ¡Tela blanca! ¿Quién era el temerario que sobre nuestras cimas recientemente libertadas de la tiranía osaba enarbolar el odioso estandarte de la contrarrevolución? Forzoso fué poner sobre la tela blanca bandas azules y rojas.

Mechain operaba en España; otras eran las dificultades, pero no por eso eran menores. Los labriegos españoles eran hostiles. Allí no faltaban campanarios, pero instalarse en ellos con instrumentos misteriosos y quién sabe si diabólicos, ¿no era un sacrilegio? Los revolucionarios eran los aliados de España, pero eran aliados a quienes les gustaba demasiado los líos.

Sin cesar, escribe Mechain, nos amenazan con venir a degollarnos. «Felizmente, gracias a las exhortaciones de

(1) Sin calzones. (N. del T.)

los curas y a las letras pastorales de los obispos, estos hueraños españoles sólo se contentaron con amenazarlos».

Algunos años después, Mechain hizo una segunda expedición a España: se proponía prolongar el meridiano desde Barcelona hasta las Baleares. Era la primera vez que se trataba de hacer franquear a las triangulaciones un brazo de mar, observando las señales levantadas en alguna montaña elevada de una alejada isla. La empresa fué bien concebida y planeada; fracasó, sin embargo. El sabio francés encontró toda clase de dificultades de las cuales se lamenta amargamente en su correspondencia. «El infierno — escribe — puede que con alguna exageración, el infierno y todos los azotes que ha vomitado sobre la Tierra, las tempestades, la guerra, la peste y las negras intrigas se han desencadenado contra mí».

El hecho es que encontró entre sus colaboradores más orgullo y obstinación que buena voluntad y que mil incidentes retardaron su trabajo. La peste no era nada, el temor de la peste era más temible, todas estas islas se defienden de las vecinas y temían recibir el azote. Mechain no obtuvo sino después de largas semanas el permiso de desembarco, con la condición de envinagrar todos sus papeles; esta era la antisepsia de esta época.

Disgustado y enfermo, acababa de pedir su retorno, cuando murió.

Fueron Arago y Biot quienes tuvieron el honor de volver a tomar la obra inconclusa y llevarla a buen fin.

Gracias al apoyo del gobierno español, a la protección de varios obispos, y sobre todo a la de un célebre jefe de bandoleros las operaciones avanzaron bastante de prisa. Fueron felizmente terminadas y ya Biot había regresado a Francia cuando estalló la tempestad.

Era el momento en que España entera tomaba las armas para defender su independencia contra nosotros. ¿Por qué este extranjero subía a las montañas para hacer señales? Era evidente: para llamar a la escuadra francesa. Arago no pudo escapar al populacho sino constituyéndose prisionero. En su prisión no tuvo otra distracción que la de leer en los diarios españoles el relato de

su propia ejecución. Los diarios de este tiempo daban algunas veces las noticias anticipadas. Tuvo al menos el consuelo de ver que había muerto cristianamente y con coraje.

La prisión misma no era más segura. Tuvo que evadirse y pasar a Argel. Allí se embarcó para Marsella en un navío argelino. Este navío fué capturado por un corsario español y he aquí a Arago de nuevo en España y atado codo con codo, en la más espantosa miseria.

Si no se hubiera tratado más que de estos sujetos y de sus huéspedes, el bey no hubiera dicho nada. Pero había a bordo dos leones, presente que el soberano africano enviaba a Napoleón. El bey amenazó con la guerra.

El navío y los prisioneros fueron libertados. La ruta podría haber sido correctamente hecha, puesto que había un astrónomo a bordo, pero el astrónomo estaba mareado y los marinos argelianos que querían ir a Marsella llegaron a Bougi. De aquí Arago se trasladó a Argel, atravesando a pie la kabila en medio de grandes peligros. Durante largo tiempo fué retenido en África y amenazado con prisión. Tras mucho trabajo pudo volver a Francia; sus observaciones, que había conservado bajo su camisa, y, lo que es más extraordinario, sus instrumentos habían atravesado sin daño sus terribles aventuras.

Hasta aquí no solamente Francia ha ocupado el primer lugar, sino que se ha sostenido en la escena casi sola. En los años que siguieron no permanecimos inactivos y nuestra carta de Estado Mayor es un modelo. Entretanto los nuevos métodos de cálculo y observación nos vinieron de Alemania e Inglaterra. Solamente después de unos cuarenta años Francia volvió a ocupar su lugar. Se lo debe a un sabio oficial, el general Perrier, que ejecutó con éxito una empresa verdaderamente audaz, la junción de España y África. Algunas estaciones fueron instaladas sobre cuatro cimas, sobre las dos riberas del Mediterráneo. Durante largos meses se esperó una atmósfera calma y límpida. Al fin se vió un delgado hilo de luz que había recorrido 300 kilómetros por encima de los mares. La operación había tenido éxito.

Hoy se conciben proyectos más audaces aún. De una montaña vecina a Niza se enviarán señales a Córcega, no ya en vista de determinaciones geodésicas, sino para medir la velocidad de la luz. La distancia no es más que doscientos kilómetros; pero el rayo luminoso deberá hacer el viaje de ida y vuelta, después de reflejarse en un espejo colocado en Córcega. Y no se perderá en el camino, porque debe volver exactamente al punto de partida.

Después la actividad de la Geodesia francesa no se ha detenido. No tenemos más aventuras que contar, pero la obra científica realizada ha sido inmensa.

El territorio de Francia de ultramar, lo mismo que el de la metrópoli, se cubre con triángulos medidos con precisión, se ha llegado a ser más y más exigente, y lo que nuestros padres admiraban, no nos basta hoy. Pero a medida que se busca más exactitud, las dificultades aumentan considerablemente. Estamos rodeados de trampas y debemos desafiar mil causas de error insospechado. Es preciso entonces crear instrumentos cada vez más impecables.

En esto, aun Francia no se ha dejado distanciar. Nuestros aparatos para medir bases y ángulos no dejan nada que desear. Citaré también el péndulo del Sr. Coronel Defforges, que permite determinar la gravedad con una precisión desconocida hasta ahora.

El porvenir de la Geodesia francesa está actualmente en manos del Servicio Geográfico de la Armada, dirigida sucesivamente por el general Bassot y el general Berthau. La elección ha sido perfecta. Para hacer la Geodesia, las aptitudes científicas no bastan; hace falta ser capaz de soportar largas fatigas bajo todos los climas, es preciso que el jefe sepa obtener la obediencia de sus colaboradores e imponerse a sus auxiliares indígenas. Estas son las cualidades militares. El resto se sabe, que en nuestra Armada la Ciencia ha marchado siempre a la par con el coraje.

Agrego que una organización militar asegura la unidad de acción indispensable. Será más difícil conciliar las pretensiones rivales de sabios celosos de su independencia,

avaros de lo que ellos llaman su gloria y que deberían obrar de común acuerdo, aunque separados por grandes distancias. Entre los geodestas de antes hubo frecuentes discusiones, de las cuales algunas tuvieron gran resonancia: la Academia ha retenido largo tiempo la querella entre Bougneur y La Condamine. No quiero decir que los militares están exentos de pasiones, pero la disciplina impone silencio a los espíritus demasiado sensibles.

Varios gobiernos extranjeros han llamado a nuestros oficiales para organizar su servicio geodésico: ésta es la prueba de que la influencia científica de Francia en el exterior no se ha debilitado.

Nuestros ingenieros hidrógrafos aportan también a la obra común un glorioso contingente. El levantamiento topográfico de nuestros montes, nuestras colonias, el estudio de las mareas, les ofrecen un vasto campo de descubrimientos. Citaré, en fin, el nivelamiento general de Francia, que fué ejecutado por los ingeniosos y precisos métodos del Sr. Lallemand.

Con tales hombres, estamos seguros del porvenir. El trabajo no les faltará, por otra parte. Nuestro imperio colonial les abre grandes espacios mal explorados. No es esto todo: la Asociación Geodésica Internacional ha reconocido la necesidad de una nueva medida del arco de Quito, determinado antiguamente por La Condamine. Es Francia quien ha sido encargada de esta operación; tenía todos los derechos, puesto que nuestros antepasados habían hecho, por así decir, la conquista científica de las cordilleras. Estos derechos, por otra parte, no han sido puestos en duda, y nuestro Gobierno los ha ejercido. Los capitanes Maurain y Lacombe han ejecutado un primer reconocimiento, y la rapidez con la cual han cumplido su misión, atravesando países difíciles y escalando las más escarpadas cumbres, merece todos los elogios.

Han merecido la admiración del Sr. General Alfaro, presidente de la República del Ecuador, que los ha denominado «los hombres de hierro» ⁽¹⁾.

(1) En español en el original, (N. del T.)

La expedición definitiva partió bajo el mando del teniente coronel (entonces comandante) Bourgeois. Los resultados obtenidos han justificado las esperanzas que se habían concebido. Pero nuestros oficiales han encontrado dificultades imprevistas debidas al clima. Más de una vez, alguno de ellos ha debido permanecer largos meses a una altura de 4.000 metros, entre nubes y nieve, sin ninguna de las señales que tenía que anotar y que rehusaban desenmascarse. Pero, gracias a su perseverancia y a su coraje, no resultó más que un retardo y un aumento de gastos, sin que sufrieran la exactitud de las medidas.

CONCLUSIONES GENERALES

Lo que he tratado de explicar en las páginas que han precedido es cómo el sabio debe arreglárselas para elegir entre los innumerables hechos que se ofrecen a su curiosidad, puesto que también el natural enfermizo de su espíritu obliga a hacer una elección, por más que una elección sea siempre un sacrificio. Lo he explicado primero por consideraciones generales, llamando por una parte la naturaleza del problema a resolver y por otra tratando de comprender mejor la del espíritu humano, que es el principal instrumento de la solución. Lo he explicado mediante ejemplos; no los he multiplicado al infinito. También he debido hacer una elección y he elegido, naturalmente, las cuestiones que más había estudiado. Otros que yo, habrían hecho sin duda una elección diferente; pero poco importa, porque creo que habría llegado a las mismas conclusiones.

Hay una jerarquía de hechos: unos, sin valor; no nos enseñan más que ellos mismos. El sabio que los ha constatado no ha aprendido más que un hecho, y no ha llegado a ser capaz de prever nuevos hechos. Estos hechos, ahí, parecen producirse una vez, pero no están destinados a renovarse.

Hay, por otra parte, los hechos de gran rendimiento,

alguno de los cuales nos enseñan una nueva ley. Y puesto que es preciso hacer una elección, es a éstos que el sabio debe ligarse. Sin duda esta clasificación es relativa y depende de la debilidad de nuestro espíritu. Los hechos de poco rendimiento son los hechos complejos, sobre los cuales múltiples circunstancias pueden ejercer una sensible influencia, circunstancias muy numerosas y diversas para que podamos discernirlas todas.

Pero debería decir más bien que son éstos los hechos que juzgamos complejos, puesto que la confusión de estas circunstancias sobrepasa el alcance de nuestro espíritu. Sin duda que un espíritu más vasto y fino que el nuestro juzgará de otro modo. Pero importa poco; no es de este espíritu superior del que nos podemos servir, es del nuestro. Los hechos con gran rendimiento son los que juzgamos simples, sea que lo sean realmente, puesto que no son influenciados sino por un pequeño número de circunstancias bien definidas; sea que tomen una apariencia de simplicidad, puesto que las múltiples circunstancias de que dependen obedecen a las leyes del azar y llegan así a compensarse mutuamente. Es a esto a lo que se llega más a menudo. Y es esto lo que nos ha obligado a examinar un poco más de cerca qué es el azar. Los hechos y las leyes del azar se aplican, llegando a ser accesibles al sabio que se descorazonaría ante la extraordinaria complicación de problemas de leyes que no fuera aplicada.

Hemos visto que estas consideraciones se aplican no solamente a las Ciencias Físicas sino también a las Ciencias Matemáticas. El método de demostración no es el mismo para el físico que para el matemático. Pero los métodos de invención se parecen mucho. En un caso como en el otro, consisten en remontarse del hecho a la ley, a buscar los hechos susceptibles de conducir a una ley.

Para poner este punto en evidencia, he enseñado el espíritu del matemático mientras trabaja. Bajo tres formas: el espíritu del matemático inventor y creador, el del geómetra inconsciente que en nuestros lejanos antepasados, o en los brumosos años de nuestra infancia, nos ha construido nuestra instintiva noción del espacio, el

del adolescente a quien los maestros de la enseñanza secundaria descubren los primeros principios de la Ciencia y tratan de hacerle comprender las definiciones fundamentales. Por todas partes hemos visto el papel de la intuición y el del espíritu de generalización, sin el cual estos tres estados de los matemáticos, si osase expresarme así, serían reducidos a una igual importancia.

En la misma demostración, la lógica no es el todo; el verdadero razonamiento matemático es una verdadera inducción, diferente por todos los conceptos de la inducción física, pero procediendo como ella de lo particular a lo general. Todos los esfuerzos que se han hecho para trastocar este orden y traer la inducción matemática a las reglas de la lógica, no han terminado más que en fracaso mal disimulado por el empleo de un lenguaje inaccesible al profano. Los ejemplos que he dado de las Ciencias físicas nos han mostrado diversos casos de hechos de gran rendimiento. Una experiencia de Kaufman sobre los rayos del radio revoluciona a la vez la Mecánica, la óptica y la Astronomía. ¿Por qué? Es porque a medida que estas ciencias se han desarrollado, hemos reconocido mejor los lazos que las unían, y entonces hemos entrevisto una especie de dibujo general de la carta de la Ciencia Universal. Hay hechos comunes a varias Ciencias que parecen la fuente común de cursos de agua divergentes en todas las direcciones, y que son comparables a ese nudo de San Gotardo, de donde salen las aguas que alimentan cuatro cuencas diferentes. Entonces podemos hacer la elección de los hechos con más detenimiento que nuestros antecesores que miraban estas cuencas como distantes y separadas por infranqueables barreras.

Son siempre los hechos simples que es preciso elegir, pero entre estos hechos simples debemos preferir los que están colocados en esa especie de nudo de San Gotardo de que acabo de hablar.

Y cuando las Ciencias no tengan relación directa, se esclarecerán aún mutuamente por la analogía. Cuando se han estudiado las leyes a las cuales obedecen los gases, se sabe que se atacaba un hecho de gran rendimiento; y por

lo tanto se estima este hecho por debajo de su valor, puesto que los gases son en un cierto punto de vista la imagen de la Vía Láctea y que estos hechos que no parecen interesantes más que para el físico, abrirán pronto horizontes nuevos a la Astronomía, que no se lo esperaba.

En fin, cuando el geodesta vea que es preciso desplazar su lente algunos segundos para localizar una señal que ha colocado a duras penas, esto es un pequeño hecho, pero un hecho de gran rendimiento, no solamente porque esto le revela la existencia de una pequeña joroba sobre el geoide terrestre; esta pequeña joroba no tendría por sí sola gran interés, pero puesto que esta joroba le da indicaciones sobre la distribución de la materia en el interior del globo y también sobre el pasado de nuestro planeta, sobre su futuro, sobre las leyes de su desarrollo.